

SECONDE · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 4

Fiche de cours Équations et inéquations

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

1 VOCABULAIRE

Définition. Une **solution** d'une équation (ou d'une inéquation) d'inconnue x est un réel qui rend l'égalité (ou l'inégalité) vraie. **Résoudre**, c'est déterminer toutes les solutions; on note S l'**ensemble des solutions**, écrit sous forme d'intervalles ou de la liste $\{\dots\}$, et $S = \emptyset$ lorsqu'il n'y en a aucune.

Définition. L'**ensemble de définition** $\mathcal{D}$ d'une équation est l'ensemble des réels pour lesquels toutes les expressions écrites existent : on exclut les valeurs qui annulent un dénominateur et celles qui rendent négatif un nombre sous une racine carrée. $\mathcal{D}$ **se détermine avant toute résolution**, et les solutions trouvées doivent lui appartenir.

Remarque. Deux équations sont **équivalentes** lorsqu'elles ont les mêmes solutions. On ne change pas l'ensemble des solutions en ajoutant un même nombre aux deux membres, ni en les multipliant par un même nombre *non nul*.

2 ÉQUATIONS

Propriété — premier degré. Pour $a \neq 0$, l'équation $ax + b = 0$ a une unique solution $x = -\frac{b}{a}$. Si $a = 0$, l'équation $0 \times x + b = 0$ n'a aucune solution lorsque $b \neq 0$, et tout réel est solution lorsque $b = 0$.

Théorème — équation produit nul. Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins des facteurs est nul :

$$A(x) \times B(x) = 0 \iff A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0.$$

Propriété — équation quotient. Pour $x \in \mathcal{D}$: $\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \iff A(x) = 0$ et $\frac{A(x)}{B(x)} = k \iff A(x) = k B(x)$.

Méthode — mettre en équation un problème. choisir l'inconnue et préciser ce qu'elle représente (avec son unité), traduire l'énoncé par une égalité, résoudre, puis **revenir à la question posée** et vérifier que la réponse a un sens.

3 INÉQUATIONS

Propriété — règles de calcul. On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant un même réel aux deux membres, ni en les multipliant (ou en les divisant) par un même réel **strictement positif**. On **change le sens** de l'inégalité en multipliant ou en divisant par un réel **strictement négatif**.

Méthode — comparer deux quantités A et B . *Comparaison additive* : étudier le signe de $A - B$, car $A - B > 0 \iff A > B$.

Comparaison multiplicative : si $A > 0$ et $B > 0$, comparer $\frac{A}{B}$ à 1, car $\frac{A}{B} > 1 \iff A > B$; le quotient dit « combien de fois » A contient B et se traduit en pourcentage.

4 SIGNE D'UN PRODUIT, SIGNE D'UN QUOTIENT

Propriété — signe de $ax + b$. Pour $a \neq 0$, l'expression $ax + b$ s'annule en $-\frac{b}{a}$; elle est du signe de a après cette valeur, et du signe contraire avant.

Propriété — règle des signes. Un produit ou un quotient de deux expressions est **positif** lorsqu'elles sont de même signe, **négatif** lorsqu'elles sont de signes contraires.

Méthode — résoudre $P(x) \geq 0$ ou $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$. tout passer dans le membre de gauche, réduire au même dénominateur, factoriser, puis dresser un **tableau de signes** : une ligne par facteur, une ligne pour le résultat. Les valeurs interdites sont marquées d'une double barre et sont **exclues** de S .

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$2x + 6$	—	0	+	+
$x - 1$	—	—	0	+
$Q(x)$	+	0	—	+

Figure 1 — Signes de $Q(x) = \frac{2x+6}{x-1}$, avec $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On lit $Q(x) \geq 0$ pour $x \in]-\infty; -3] \cup]1; +\infty[$.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Résoudre une équation ou une inéquation du premier degré et donner S sous forme d'intervalle.
- Résoudre une équation produit nul, une équation quotient nul, une équation $\frac{A(x)}{B(x)} = k$ après avoir donné $\mathcal{D}$.
- Dresser le tableau de signes d'un produit ou d'un quotient de facteurs du premier degré, et en déduire un ensemble de solutions.
- Comparer deux quantités par la différence ou par le quotient, et interpréter le résultat dans un contexte concret.
- Mettre un problème en équation ou en inéquation, le résoudre et interpréter la solution.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — équation produit nul et équation quotient

$(2x - 5)(x + 3) = 0$ équivaut à $2x - 5 = 0$ ou $x + 3 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{5}{2}$ ou $x = -3$: $S = \{-3; \frac{5}{2}\}$. De même, $9x^2 - 4 = 0$ se factorise en $(3x - 2)(3x + 2) = 0$: $S = \{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\}$.

Résoudre $\frac{3x - 1}{x + 2} = 4$: la valeur interdite est -2 , donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Pour $x \in \mathcal{D}$, l'équation équivaut à $3x - 1 = 4(x + 2)$, soit $3x - 1 = 4x + 8$, d'où $x = -9$. Comme $-9 \in \mathcal{D}$: $S = \{-9\}$.

★ EXEMPLE — inéquation

Résoudre $4 - 3x \geq x + 12$. On obtient $-4x \geq 8$, puis, **en changeant le sens** car on divise par -4 : $x \leq -2$. Donc $S =]-\infty; -2]$.

★ EXEMPLE — inéquation quotient

Résoudre $\frac{x + 1}{x - 2} \leq 1$. Ici $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On passe tout à gauche : $\frac{x + 1}{x - 2} - 1 = \frac{(x + 1) - (x - 2)}{x - 2} = \frac{3}{x - 2}$. Ce quotient est négatif lorsque $x - 2 < 0$, donc $S =]-\infty; 2[$ (la valeur 2 est exclue).

★ EXEMPLE — comparaison et mise en inéquation

Un forfait A coûte 4 € de mise à disposition puis 2 € par heure, un forfait B coûte 3 € par heure. Avec $x > 0$ heures : $A(x) - B(x) = (4 + 2x) - 3x = 4 - x$. Cette différence est *positive* pour $x < 4$: A est alors plus cher, donc B est plus avantageux avant 4 heures, A l'est au-delà, et les deux tarifs sont égaux pour $x = 4$.

✗ PIÈGES

- Dans une *inéquation*, on ne multiplie *jamais* les deux membres par un dénominateur dont on ignore le signe : on se ramène à une comparaison à 0, puis à un tableau de signes.
- Une valeur interdite n'est jamais solution, même si elle annule le numérateur : toujours conclure dans $\mathcal{D}$.
- Multiplier ou diviser une inégalité par un nombre négatif en change le sens ; l'oublier donne l'intervalle complémentaire.
- $A \times B = 6$ ne donne pas « $A = 6$ ou $B = 6$ » : la règle du produit nul n'est valable que pour le nombre 0.
- Dans un tableau de signes, une racine du dénominateur est marquée par une double barre (valeur exclue), une racine du numérateur par un zéro (valeur incluse pour ≥ 0).