

SECONDE · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 4

Exercices 1 Équations et inéquations

Compléments : comparer deux quantités, équations et inéquations quotient, mise en inéquation

6 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · sans calculatrice



R. RINGUET · 2026 – 2027

► MÉTHODE — Comparer deux quantités, résoudre avec un quotient

- **Comparaison additive** : on étudie le signe de $A - B$. $A - B > 0 \iff A > B$; $A - B < 0 \iff A < B$; $A - B = 0 \iff A = B$.
- **Comparaison multiplicative** : si $B > 0$, $\frac{A}{B} > 1 \iff A > B$ et $\frac{A}{B} < 1 \iff A < B$; le quotient dit « combien de fois » A contient B .
- **Équation ou inéquation quotient** : donner d'abord $\mathcal{D}$, puis tout passer à gauche et réduire au même dénominateur pour se ramener à $\frac{Q(x)}{R(x)} = 0$ ou $\frac{Q(x)}{R(x)} \geq 0$, résolu par un tableau de signes. **Dans une inéquation, ne jamais multiplier par un dénominateur de signe inconnu.** Solution en intervalles, ou $S = \emptyset$.

Exercice 1 Comparer par la différence

●○○

- 1.1** Vérifier la factorisation proposée de $A - B$ en développant, dresser le tableau de signes de $A - B$, puis dire, selon x , laquelle des deux quantités est la plus grande. Le cas d) est particulier : que peut-on affirmer pour tout réel x , et quand a-t-on $A = B$?
- a) $A = x^2, B = 4x$; $A - B = x(x - 4)$ b) $A = (x + 1)^2, B = x^2 + 1$; $A - B = 2x$
- c) $A = x^2 + 6, B = 5x$; $A - B = (x - 2)(x - 3)$ d) $A = 2x - 1, B = x^2$; $A - B = -(x - 1)^2$
- 1.2** Comparer x et x^2 . Factoriser $x^2 - x$ et dresser son tableau de signes sur $\mathbb{R}$. Compléter : si $x \in]0; 1[$ alors $x^2 \dots x$; si $x > 1$ alors $x^2 \dots x$.
- 1.3** Comparer x et $\sqrt{x}$. Soit $x \geq 0$. Justifier que $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$, en déduire le signe de $\sqrt{x} - x$ selon que $x \in [0; 1]$ ou $x \geq 1$, et vérifier avec $x = \frac{1}{4}$ et $x = 9$.

Exercice 2 Comparer par le quotient : deux tarifs, deux aires

●●○

- 2.1** Un casque audio coûte 48 € au magasin A et 60 € au magasin B. Rendre $\frac{48}{60}$ irréductible, le comparer à 1, l'exprimer en pourcentage et compléter : « A est ... % moins cher que B ». Calculer aussi la différence des prix : laquelle des deux comparaisons donne le pourcentage ?
- 2.2** Un vélo se loue au tarif A : 4 € de mise à disposition puis 2 € par heure, ou au tarif B : 3 € par heure sans frais fixes. On note $x > 0$ le nombre d'heures. Exprimer les prix $A(x)$ et $B(x)$ en euros, calculer $A(x) - B(x)$, étudier son signe et conclure par une phrase. Pour 2 heures, calculer $\frac{A(2)}{B(2)}$ sous forme irréductible et interpréter.
- 2.3** Soit $x > 0$. On compare l'aire $\mathcal{A}$ d'un carré de côté $x + 1$ et l'aire $\mathcal{B}$ d'un rectangle de dimensions x et $x + 2$. Calculer $\mathcal{A} - \mathcal{B}$: quelle aire est la plus grande, et l'écart dépend-il de x ? Calculer $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ pour $x = 3$ puis $x = 9$: que devient ce quotient quand x est très grand ?

Exercice 3 Équations quotient $\frac{A(x)}{B(x)} = k$

●●○

Pour chaque équation : donner $\mathcal{D}$, se ramener à une équation sans quotient (du premier degré sauf en f)), résoudre, vérifier que la valeur trouvée est dans $\mathcal{D}$ et conclure ($S = \{ \dots \}$ ou $S = \emptyset$).

- a) $\frac{3x - 1}{x + 2} = 4$ b) $\frac{x + 4}{2x - 1} = 2$ c) $\frac{x - 6}{x + 2} = -3$

d) $\frac{2x+1}{x-3} = 2$

e) $\frac{2x+1}{x-3} = -1$

f) $\frac{x^2+x-6}{x-2} = 5$

Pour f), développer $5(x-2)$ puis reconnaître une identité remarquable. Enfin : pourquoi $\frac{2x+1}{x-3} = k$ a-t-elle une solution pour toute valeur de k sauf une, que l'on précisera ?

Exercice 4 Inéquations quotient, pas à pas



4.1 On veut résoudre $\frac{2x+1}{x-3} \geq 1$.

- a) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$, puis montrer que, pour tout x de $\mathcal{D}$, $\frac{2x+1}{x-3} - 1 = \frac{x+4}{x-3}$.
 b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous (double barre à la valeur interdite), puis donner S .

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$x+4$				
$x-3$				
$\frac{x+4}{x-3}$				

Figure 1 — Tableau de signes à compléter

4.2 Résoudre de la même façon, en détaillant les mêmes étapes :

a) $\frac{3}{x+2} \leq 1$

b) $\frac{x-5}{x+1} < 2$

c) $\frac{2x+6}{x+3} > 3$

4.3 L'item c) donne un ensemble de solutions particulier : le nommer, puis l'expliquer en simplifiant $\frac{2x+6}{x+3}$ ($x \neq -3$).

Exercice 5 Mettre en inéquation



Pour chaque problème : choisir l'inconnue, traduire par une inéquation, résoudre, conclure par une phrase.

- 5.1 *Choisir un abonnement.* Un cinéma propose la formule « à la place » à 6,50€ la séance, ou la formule « abonné » à 30€ l'année plus 3,50€ la séance. À partir de combien de séances la formule « abonné » est-elle strictement moins chère ?
 5.2 *Seuil de rentabilité.* Produire x lampes coûte $C(x) = 5x + 240$ euros, la vente rapporte $R(x) = 13x$ euros. Exprimer $B(x) = R(x) - C(x)$, puis trouver le nombre minimal de lampes à vendre pour que $B(x) \geq 0$, puis pour que $B(x) \geq 400$.
 5.3 *La moyenne.* Lisa a obtenu 12 ; 9 et 14 à trois contrôles de coefficient 1. Le quatrième est de coefficient 2 : quelle note au minimum doit-elle y obtenir pour que sa moyenne soit au moins 12 ?

Exercice 6 Une aire à encadrer : calcul et lecture graphique



Avec 40 m de grillage on clôture un enclos rectangulaire de largeur x mètres ($0 < x < 20$) et d'aire $\mathcal{A}(x)$, en m^2 (figure 2).

- 6.1 Justifier que la longueur est $20 - x$, puis que $\mathcal{A}(x) = x(20 - x)$.
 6.2 Par lecture graphique : pour quelles largeurs l'aire est-elle d'au moins 75 m^2 ? Quelle largeur semble maximiser l'aire ?
 6.3 Démontrer que $\mathcal{A}(x) - 75 = -(x-5)(x-15)$, puis résoudre $\mathcal{A}(x) \geq 75$ par un tableau de signes. Conforme à la lecture ?
 6.4 Montrer que $\mathcal{A}(x) = 100 - (x-10)^2$. En déduire l'aire maximale, la largeur correspondante et la forme de l'enclos. L'aire peut-elle dépasser 105 m^2 ?

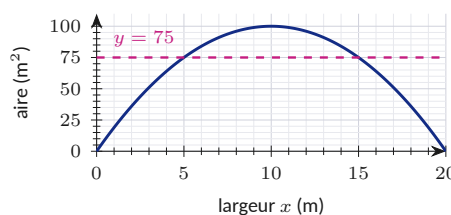


Figure 2 — Aire de l'enclos selon sa largeur