

Fiche de cours Propagation et interférences

Onde progressive, double périodicité, dispersion, interférences et trous d'Young

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

1 SIGNAUX ET MILIEUX DE PROPAGATION

Définition. Un **signal** est la variation d'une grandeur physique porteuse d'information : **acoustique** (surpression $p(M, t)$ par rapport à la pression au repos, ou vitesse des particules du fluide) ; **mécanique** (déplacement transversal d'une corde, altitude de la surface d'un liquide) ; **électrique** (tension ou intensité le long d'un câble coaxial) ; **électromagnétique** (champ électrique $\vec{E}(M, t)$ d'une onde radio, lumineuse ou X).

Notation. On note $s(x, t)$ la valeur du signal en x à la date t ; toute cette fiche se limite à une propagation **unidimensionnelle** selon Ox . Le milieu est supposé **illimité** (pas de bord, donc pas d'onde réfléchi), **transparent** (pas d'absorption) et, jusqu'au bloc 5, **non dispersif**.

Propriété — ordres de grandeur à savoir citer. **Acoustique** : audible 20 Hz à 20×10^3 Hz, ultrasons au-delà (40 kHz en TP) ; $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans l'air, $1\,500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans l'eau, $5\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans l'acier. **Mécanique** : corde et vagues, de 0,1 Hz à 100 Hz ; houle $\sim 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, corde de guitare $\sim 100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. **Électromagnétique** : radio 10^5 Hz à 10^9 Hz, visible 4 à 8×10^{14} Hz (soit 400 nm à 800 nm) ; $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans le vide.

2 ONDE PROGRESSIVE : LE RETARD DE PROPAGATION

Définition. Un signal se propage à la **célérité** $c > 0$ selon les x croissants lorsque le signal observé en x reproduit, avec le seul **retard** $\tau = x/c$, celui observé en $x = 0$: pour tout t ,

$$s(x, t) = s(0, t - \tau) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

où f est la fonction du temps enregistrée à l'origine. Une telle onde est dite **progressive**. Si elle se propage vers les x décroissants, le signal en x est *en avance* et $s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$.

Propriété — formes équivalentes. Puisque $t - \frac{x}{c} = -\frac{1}{c}(x - ct)$, on peut aussi écrire $s(x, t) = F(x - ct)$ (x croissants) ou $G(x + ct)$ (x décroissants). Les fonctions f et F sont *différentes* mais décrivent la même onde : f est un signal temporel (lu à x fixé), F un profil spatial (photographié à t fixé).

Méthode — reconnaître une onde progressive. Un signal est une onde progressive si et seulement s'il ne dépend de x et de t que par la combinaison $t \mp x/c$ (ou $x \mp ct$). Le **contrôle d'homogénéité** tranche aussitôt : dans $t - x/c$ les deux termes sont des durées, dans $x - ct$ des longueurs ; $f(t - cx)$ et $f(x - t/c)$ sont *impossibles*.

✗ ATTENTION — Le sens de propagation

Onde vers les x croissants $\iff$ signe **moins** dans $t - x/c$ (le point aval reçoit *après*). Onde vers les x décroissants $\iff$ signe **plus**. C'est l'erreur la plus fréquente : la retenir par le raisonnement (« plus loin, c'est plus tard »), jamais par cœur.

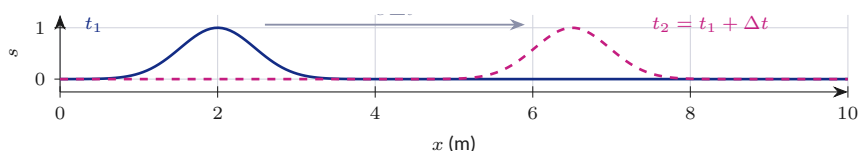


Figure 1 — Deux photographies du milieu : le profil est *translaté* de $c \Delta t$ sans déformation (milieu non dispersif et transparent). Ici $\Delta t = 9 \text{ ms}$ et $c \Delta t = 4,5 \text{ m}$, donc $c = 500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Méthode — exploiter un enregistrement. Deux *photographies* $s(x)$ aux dates t_1 et t_2 : le décalage Δx du profil donne le sens de propagation (son signe) et $c = \Delta x / \Delta t$. Deux *chronogrammes* $s(t)$ en x_1 et x_2 : le retard Δt donne $c = (x_2 - x_1) / \Delta t$.

3 ONDE PROGRESSIVE SINUSOÏDALE ET DOUBLE PÉRIODICITÉ

Définition. Une **onde progressive sinusoïdale** (ou monochromatique) de pulsation ω se propageant vers les x croissants s'écrit, en partant de $s(0, t) = s_m \cos(\omega t + \varphi_0)$:

$$s(x, t) = s_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right] = s_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$s_m > 0$ est l'**amplitude**, $k > 0$ le **nombre d'onde** (en $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$), et $\Phi(x, t) = \omega t - kx + \varphi_0$ la **phase** de l'onde.

Théorème — double périodicité. Le signal est périodique en temps et en espace :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{période temporelle}), \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (\text{longueur d'onde}), \quad \lambda = cT = \frac{c}{f}$$

Idee de la démonstration : λ est la plus petite période spatiale, donc $k\lambda = 2\pi$; avec $k = \omega/c$ et $\omega T = 2\pi$, il vient $\lambda = 2\pi c/\omega = cT$. Autre lecture : pendant une période T , le profil se translate de cT , et comme il se reproduit à l'identique, cT est bien une période spatiale.

✗ **ATTENTION** — λ n'appartient pas à la source

La **fréquence** est imposée par la source et ne change pas quand l'onde change de milieu. La **longueur d'onde**, elle, dépend du milieu par c : un son de 440 Hz a $\lambda = 77$ cm dans l'air et $\lambda = 3,4$ m dans l'eau. Une onde lumineuse de $\lambda_0 = 600$ nm dans le vide a $\lambda = \lambda_0/n = 400$ nm dans un verre d'indice $n = 1,5$.

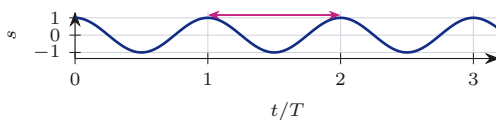


Figure 2 — À x fixé : période T .

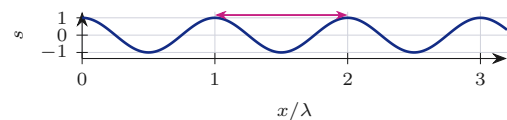


Figure 3 — À t fixé : période $\lambda = cT$.

4 DÉPHASAGE DÙ À LA PROPAGATION

Théorème — déphasage et retard. Soient deux points $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$ d'un milieu non dispersif traversé par l'onde progressive sinusoïdale précédente. Le signal en M_2 est celui de M_1 retardé de $\tau = \frac{x_2 - x_1}{c}$, donc le **déphasage de M_2 par rapport à M_1** vaut

$$\Delta\varphi = \Phi_2 - \Phi_1 = -k(x_2 - x_1) = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = -\omega \tau = -2\pi \frac{\tau}{T}$$

Le signe — traduit un **retard** : le point situé plus loin de la source est en retard de phase.

Propriété — cas particuliers. $\Delta x = \lambda$ donne $\Delta\varphi = -2\pi$: les deux points vibrent **en phase**. $\Delta x = \lambda/2$ donne $\Delta\varphi = -\pi$: ils vibrent **en opposition de phase**. Plus généralement, M_1 et M_2 vibrent en phase si et seulement si $\Delta x = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

Méthode — mesurer λ , puis c . On déplace un récepteur le long de la direction de propagation en observant à l'oscilloscope son déphasage avec un récepteur fixe : chaque retour en phase correspond à un déplacement de λ . Après N coïncidences sur une distance d , $\lambda = d/N$ puis $c = \lambda f$; prendre N grand améliore la précision.

★ **EXEMPLE** — ultrasons de travaux pratiques

Émetteur à $f = 40,0$ kHz dans l'air. On déplace le récepteur de $d = 42,5$ mm et l'on observe $N = 5$ retours en phase : $\lambda = 8,50$ mm, puis $c = \lambda f = 8,50 \times 10^{-3} \times 40,0 \times 10^3 = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

5 MILIEUX DISPERSIFS ET VITESSE DE PHASE

Définition. On appelle **relation de dispersion** du milieu la relation $\omega \mapsto k(\omega)$ imposée par le milieu à toute onde progressive sinusoïdale qui s'y propage. On définit alors la **vitesse de phase**

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

qui est la vitesse à laquelle se déplace un point de phase donnée (une crête, par exemple).

Définition. Le milieu est **non dispersif** si v_φ ne dépend pas de ω , c'est-à-dire si $k = \omega/c$ avec c constante : alors $v_\varphi = c$ pour toutes les fréquences. Il est **dispersif** dans le cas contraire.

Propriété — conséquence. Dans un milieu non dispersif, un signal de forme quelconque se propage *sans déformation* : toutes ses composantes sinusoïdales voyagent à la même vitesse. Dans un milieu dispersif, chacune avance à sa propre vitesse $v_\varphi(\omega)$ et le signal se déforme : seule une onde *monochromatique* garde sa forme.

★ **EXEMPLE — cinq milieux**

Non dispersifs : le vide pour la lumière ; l'air pour le son audible ; un câble coaxial idéal. **Dispersifs** : un verre d'indice $n(\lambda_0) = 1,500 + B/\lambda_0^2$ avec $B = 5,0 \times 10^{-15} \text{ m}^2$, où $v_\varphi = c/n$ vaut $c/1,520$ à 500 nm et $c/1,512$ à 650 nm (dispersion du prisme) ; l'ionosphère, de relation $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$; les vagues de gravité en eau profonde, de relation $\omega^2 = g k$, pour lesquelles $v_\varphi = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ vaut $12,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ à $\lambda = 100 \text{ m}$ et $25,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ à $\lambda = 400 \text{ m}$: la houle longue arrive la première.

Remarque — $v_\varphi > c$ n'est pas un paradoxe. Pour l'ionosphère, $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ donne $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} > c$: la vitesse

de phase n'est ni la vitesse de transport de l'énergie, ni celle de l'information — une sinusoïde illimitée dans le temps ne transporte aucune information. La propagation n'est possible que si $\omega > \omega_p$; en dessous, k n'est pas réel et l'onde est réfléchi (les ondes courtes font ainsi le tour de la Terre).

6 INTERFÉRENCES DE DEUX ONDES DE MÊME FRÉQUENCE

Notation. Deux sources S_1 et S_2 émettent des ondes **synchrones** (même fréquence) et **cohérentes** (leur déphasage à l'émission est constant dans le temps). En un point M les deux ondes se superposent : $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$ avec $s_j = A_j \cos(\omega t + \Phi_j)$.

Théorème — amplitude résultante. En posant $\Delta\varphi = \Phi_2 - \Phi_1$, la somme de deux sinusoïdes de même pulsation est une sinusoïde de même pulsation, d'amplitude A telle que

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \Delta\varphi$$

Idee de la démonstration : on somme les amplitudes complexes $\underline{s}_1 = A_1 e^{j\Phi_1}$ et $\underline{s}_2 = A_2 e^{j\Phi_2}$, puis on prend le module au carré de $\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$.

Définition. L'**intensité** (ou éclaircissement, en optique) est proportionnelle au carré de l'amplitude : $I = K A^2$. La relation précédente devient la **formule de Fresnel**, fournie :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$$

Le terme $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$ est le **terme d'interférences** : sans lui, les intensités s'ajouteraient simplement.

Théorème — conditions d'interférences. Avec $I_1 = I_2 = I_0$, la formule de Fresnel donne $I = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi) = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$, donc

$$\text{constructives : } \Delta\varphi = 2p\pi \ (p \in \mathbb{Z}) \implies I_{\max} = 4I_0, \quad \text{destructives : } \Delta\varphi = \pi + 2p\pi \implies I_{\min} = 0.$$

Définition. Le **contraste** de la figure d'interférences est $\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$. Il vaut 1 si et seulement si $I_1 = I_2$; il tombe à 0,80 dès que $I_2 = I_1/4$.

✖ **ATTENTION — la cohérence**

Deux sources *indépendantes* (deux lampes, deux lasers distincts) ont un déphasage à l'émission qui fluctue au hasard : le terme d'interférences a une moyenne nulle et l'on n'observe que $I = I_1 + I_2$. En optique, on **divise une même source** — c'est le rôle des deux trous d'Young. En acoustique et en radio, deux émetteurs pilotés par un même générateur sont cohérents.

7 INTERFÉRENCES LUMINEUSES : CHEMIN OPTIQUE ET TROUS D'YOUNG

Définition. Le **chemin optique** d'un rayon allant de A à B est $(AB) = \int_A^B n \, d\ell$, soit $(AB) = n AB$ dans un milieu homogène d'indice n . La phase accumulée le long du trajet vaut $\frac{2\pi}{\lambda_0} (AB)$, où λ_0 est la longueur d'onde *dans le vide*.

Définition. La **différence de chemin optique** au point M entre les deux trajets est $\delta = (S_2M) - (S_1M)$, et

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \quad \text{l'ordre d'interférence est } p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}.$$

Les interférences sont constructives si p est **entier** ($\delta = p\lambda_0$), destructives si p est **demi-entier** ($\delta = (p + \frac{1}{2})\lambda_0$).

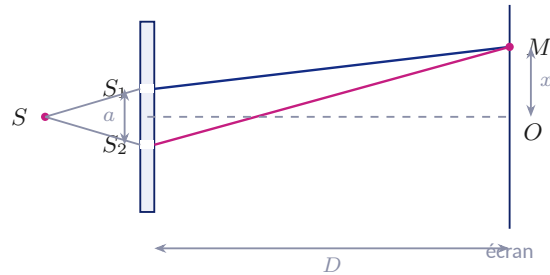


Figure 4 — Trous d'Young : une source unique S éclaire deux trous S_1 et S_2 distants de a , ce qui garantit la cohérence. L'écran est à la distance $D \gg a$.

Théorème — différence de chemin optique des trous d'Young. Avec les notations de la figure 4 — S_1 d'ordonnée $+a/2$, S_2 d'ordonnée $-a/2$, M d'abscisse x — dans l'air ($n = 1$), S étant à égale distance de S_1 et de S_2 :

$$S_2M = \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2}, \quad S_1M = \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2},$$

donc $S_2M^2 - S_1M^2 = 2ax$ et $\delta = S_2M - S_1M = \frac{2ax}{S_2M + S_1M}$. Comme $a \ll D$ et $|x| \ll D$, $S_1M + S_2M \approx 2D$:

$$\delta = \frac{ax}{D} \quad \text{d'où} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \quad \text{et} \quad p = \frac{ax}{\lambda_0 D}.$$

Théorème — répartition d'intensité et interfrange. Les deux trous étant identiques, $I_1 = I_2 = I_0$ et la formule de Fresnel donne

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right) \right] = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 D}\right)$$

On observe des **franges rectilignes**, parallèles aux trous, équidistantes. La frange centrale ($x = 0, p = 0$) est brillante. L'**interfrange** est la distance entre deux franges brillantes consécutives :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

Franges brillantes en $x = pi$ ($p \in \mathbb{Z}$), franges sombres en $x = (p + \frac{1}{2})i$.

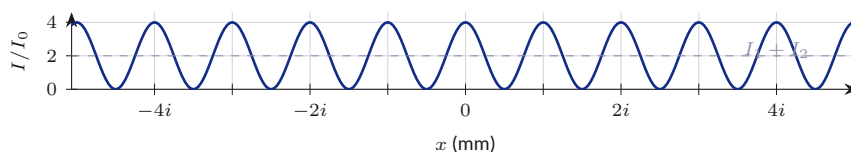


Figure 5 — Répartition d'intensité pour $a = 0,80 \text{ mm}$, $D = 2,00 \text{ m}$ et $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, soit $i = 1,50 \text{ mm}$. La moyenne vaut $2I_0 = I_1 + I_2$: les interférences redistribuent l'énergie, elles ne la créent pas.

Méthode — exploiter une figure de franges. Mesurer l'étendue L de N interfranges (jamais d'un seul) : $i = L/N$, d'où l'inconnue par $i = \lambda_0 D/a$. Contrôles : i croît avec D , décroît avec a , et est proportionnel à λ_0 — le rouge donne des franges plus larges que le bleu.

Propriété — influence d'une lame mince. Interposer devant l'un des trous une lame d'épaisseur e et d'indice n augmente de $(n - 1)e$ le chemin optique de cette voie (on remplace e d'air par e de verre). Lame devant S_2 : $\delta = \frac{ax}{D} + (n - 1)e$ et la frange

centrale passe en $x_c = -\frac{(n - 1)e D}{a}$; lame devant S_1 : signes opposés. Dans les deux cas la figure se **translate** de $\frac{(n - 1)e}{\lambda_0}$ interfranges **vers le trou couvert**, sans changer d'interfrange.

8 SAVOIR-FAIRE ET DÉMONSTRATIONS EXIGIBLES

► SAVOIR-FAIRE

- Identifier la grandeur physique qui constitue le signal ; citer des ordres de grandeur de fréquences et de célérités.
- Écrire une onde progressive sous les formes $f(t \mp x/c)$ et $F(x \mp ct)$; contrôler l'homogénéité et le sens de propagation ; prévoir l'évolution à x fixé et le profil à t fixé ; exploiter deux photographies ou deux chronogrammes.
- Relier f , λ et v_φ ; calculer k ; changer de milieu en conservant f ; relier déphasage et retard ; mesurer λ , c et un déphasage.
- Reconnaître un milieu dispersif à partir d'une relation de dispersion fournie et calculer $v_\varphi(\omega)$.
- Exprimer les conditions d'interférences et l'amplitude résultante en fonction du déphasage ; exploiter la formule de Fresnel ; tenir compte des indices dans un chemin optique.
- Établir $\delta = ax/D$ pour les trous d'Young, en déduire $I(x)$ et i , et exploiter une figure de franges.
- **Démonstrations à savoir refaire** : forme $f(t - x/c)$ à partir du retard, et écriture équivalente $F(x - ct)$; double périodicité $\lambda = cT$; déphasage $\Delta\varphi = -2\pi\Delta x/\lambda = -\omega\tau$; amplitude résultante par somme d'amplitudes complexes ; conditions d'interférences ; $\delta = ax/D$ puis $i = \lambda_0 D/a$; vitesse de phase à partir d'une relation de dispersion.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- Onde progressive : $s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ (x croissants) ; $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ (x décroissants) ; retard $\tau = \frac{\Delta x}{c}$.
- Sinusoïdale : $s = s_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$; $k = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\lambda = v_\varphi T = \frac{v_\varphi}{f}$; $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$.
- Déphasage : $\Delta\varphi = -\frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = -\omega\tau$; en phase si $\Delta x = p\lambda$, en opposition si $\Delta x = (p + \frac{1}{2})\lambda$.
- Chemin optique : $(AB) = n AB$; $\delta = (S_2M) - (S_1M)$; $\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$; $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$.
- Fresnel (fournie) : $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$; si $I_1 = I_2 = I_0$: $I = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$; $\mathcal{C} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$.
- Trous d'Young : $\delta = \frac{ax}{D}$; $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$; lame mince devant S_2 : $\delta \rightarrow \delta + (n - 1)e$.
- Repères : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $c_{\text{son}}(\text{air}) = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, eau $1500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, acier $5000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $40 \text{ kHz} \rightarrow \lambda = 8,5 \text{ mm}$; visible 400 nm à 800 nm ; $a = 0,5 \text{ mm}$, $D = 1 \text{ m}$, $\lambda_0 = 500 \text{ nm} \rightarrow i = 1 \text{ mm}$.

✖ PIÈGES

- Écrire $f(t - cx)$ ou $f(x - t/c)$: ces expressions ne sont pas homogènes. Contrôler *avant* de calculer.
- Se tromper de signe : vers les x croissants, c'est $t - x/c$ (« plus loin, donc plus tard »).
- Confondre la période temporelle T et la période spatiale λ , ou lire λ sur un chronogramme $s(t)$.
- Croire que λ ne dépend que de la source : c'est f qui est imposée par la source ; $\lambda = c/f$ change avec le milieu.
- Oublier les indices dans δ : c'est une différence de *chemin optique*, non de distance géométrique.
- Prendre $\delta = \lambda/2$ comme condition constructive : $\delta = p\lambda_0$ est constructif, $\delta = (p + \frac{1}{2})\lambda_0$ destructif.
- Ajouter les intensités sans le terme d'interférences, ou ajouter les amplitudes sans tenir compte du déphasage.
- Croire que deux sources indépendantes interfèrent : il faut la cohérence, donc une source unique divisée (ou un générateur commun).
- Confondre interférences et diffraction, ou introduire une « équation d'onde » : ni l'une ni l'autre ne figurent au programme de MPSI.
- Mesurer un interfrange sur une seule frange : toujours mesurer N interfranges et diviser par N .