

Fiche de cours

Particules chargées

Force de Lorentz, champ électrique uniforme, champ magnétostatique uniforme, applications

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

1 LA FORCE DE LORENTZ

Définition. Une particule ponctuelle de **charge** q (grandeur algébrique, en coulombs) et de masse m , animée de la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$, placée en un point où règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$, subit la **force de Lorentz**

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad (\text{N}).$$

On appelle **force électrique** la part $q\vec{E}$ et **force magnétique** la part $q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Notation. E s'exprime en $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$, B en teslas (T). La charge élémentaire vaut $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$: un électron porte $q = -e$, un proton $q = +e$, un ion n fois chargé $q = \pm ne$. Masses : $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, et l'unité de masse atomique $u = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Propriété — dimension de B . L'égalité $[qE] = [qvB]$ impose $[B] = [E]/[v]$: E/B est une vitesse. C'est l'ingrédient du sélecteur de vitesse.

Propriété — la force magnétique est orthogonale à la vitesse. Par définition du produit vectoriel, $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$: la force magnétique est à chaque instant orthogonale à la vitesse, et sa norme vaut $|q| v B |\sin \theta|$ où $\theta = (\vec{v}, \vec{B})$. Elle est **nulle** si $\vec{v} = \vec{0}$ ou si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{B}$.

Théorème — puissance de la force de Lorentz. La puissance de la force de Lorentz dans $\mathcal{R}$ est

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v} + q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = \boxed{q \vec{E} \cdot \vec{v}}$$

car $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ (produit mixte à deux vecteurs égaux). Par le théorème de la puissance cinétique, $\frac{dE_c}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$:

- un **champ électrique peut modifier l'énergie cinétique** de la particule (il l'accélère ou la freine) ;
- un **champ magnétique ne travaille jamais** : il **courbe la trajectoire sans fournir ni prélever d'énergie**. En particulier, s'il agit seul, $\|\vec{v}\|$ est constante.

Propriété — le poids est toujours négligeable... sauf pour un objet macroscopique. Pour un électron dans un champ modeste $E = 1,0 \times 10^3 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$, $\frac{eE}{m_e g} = \frac{1,6 \times 10^{-16}}{8,9 \times 10^{-30}} = 1,8 \times 10^{13}$. **On néglige systématiquement le poids d'une particule élémentaire** — mais il faut le dire et le justifier. En revanche, pour une goutte d'encre chargée ou une gouttelette d'huile, le rapport descend à quelques centaines : le poids compte.

2 MOUVEMENT DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME

Théorème — accélération constante. Une particule (q, m) soumise au seul champ électrique uniforme et stationnaire $\vec{E}$, dans un référentiel galiléen, vérifie

$$m \vec{a} = q \vec{E} \quad \implies \quad \boxed{\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} = \vec{c}t\vec{e}}$$

Le mouvement est donc **uniformément accéléré** : c'est exactement le problème de la chute libre, avec $\frac{q}{m} \vec{E}$ à la place de $\vec{g}$. La trajectoire est une droite si $\vec{v}_0$ est colinéaire à $\vec{E}$, une **parabole** sinon, contenue dans le plan $(\vec{v}_0, \vec{E})$.

✗ ATTENTION — Le signe de la charge

L'accélération est dirigée *selon* $\vec{E}$ si $q > 0$, en sens inverse de $\vec{E}$ si $q < 0$. **Un électron est dévié du côté opposé à $\vec{E}$** , donc attiré vers la plaque positive. C'est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Notation. Condensateur plan. Entre deux plaques parallèles distantes de d portées à la différence de potentiel U , le champ est uniforme, orthogonal aux plaques, dirigé de la plaque (+) vers la plaque (−), et de norme

$$E = \frac{U}{d}.$$

Ne jamais confondre U (en volts) et E (en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$).

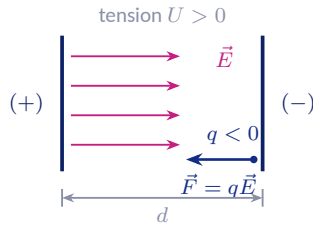


Figure 1 — Accélération : l'électron, parti de la plaque négative, gagne l'énergie eU .

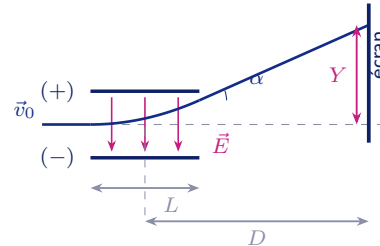


Figure 2 — Déviation : parabole entre les plaques, droite ensuite. D est mesurée depuis le centre des plaques.

Méthode — mise en équation d'une déviation. (i) repère : Ox selon $\vec{v}_0$, Oy selon la déviation, origine à l'entrée du champ ; (ii) écrire $m\vec{a} = q\vec{E}$ et projeter ; (iii) intégrer deux fois avec $\vec{v}(0) = v_0\vec{u}_x$, $\vec{r}(0) = \vec{0}$; (iv) éliminer t ; (v) évaluer en $x = L$.

Théorème — déviation dans un condensateur plan. Avec $\vec{E} = -E\vec{u}_y$ ($E > 0$) et une charge $q < 0$ (électron), en posant $a = \frac{|q|E}{m}$:

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = \frac{1}{2} a t^2, \quad \text{donc} \quad \boxed{y(x) = \frac{|q|E}{2m v_0^2} x^2}$$

la trajectoire est une parabole. À la sortie des plaques ($x = L$) :

$$y_1 = \frac{|q|EL^2}{2m v_0^2}, \quad \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{|q|EL}{m v_0^2} = \frac{2y_1}{L}.$$

Comme $\tan \alpha = 2y_1/L$, la tangente de sortie passe par le **milieu des plaques** : si D désigne la distance du centre des plaques à l'écran,

$$\boxed{Y = D \tan \alpha}$$

exactement, et non seulement en approximation.

Propriété — forme condensée. Si la particule a été préalablement accélérée sous la tension U_0 , alors $m v_0^2 = 2|q|U_0$ et, avec $E = U/d$:

$$\tan \alpha = \frac{UL}{2U_0 d}, \quad y_1 = \frac{UL^2}{4U_0 d}, \quad Y = \frac{ULD}{2U_0 d}.$$

Ces expressions ne dépendent plus ni de q ni de m : **un dispositif de déviation électrostatique est insensible à la nature de la particule**, pourvu que la tension d'accélération soit la même.

✗ ATTENTION — Vérifier que la particule sort !

La condition de non-interception est $y_1 \leq d/2$, soit $\tan \alpha \leq d/L$, soit $U \leq 2U_0 d^2/L^2$. Un énoncé où la particule heurte une plaque est un énoncé faux : ce contrôle est systématique.

3 ASPECT ÉNERGÉTIQUE : L'ÉLECTRON-VOLT

Théorème — vitesse acquise sous une différence de potentiel. Une particule (q, m) partant du repos et accélérée par un champ électrique entre deux points dont la différence de potentiel est telle que la force la pousse, acquiert, d'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la seule force électrique (le poids étant négligé) :

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = |q| U \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}}$$

où $U > 0$ est la valeur absolue de la différence de potentiel traversée. *Le résultat ne dépend ni de d , ni de la forme du champ : seule compte la tension.*

Définition. L'électron-volt est l'énergie acquise par une particule de charge $\pm e$ accélérée sous une tension de 1 V :

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Une particule de charge ne accélérée sous U_0 possède l'énergie nU_0 (en eV) : un électron sous 1,0 kV a 1,0 keV, un ion He^{2+} sous 1,0 kV a 2,0 keV.

★ **EXEMPLE — les ordres de grandeur à connaître**

Électron sous $U_0 = 1,0 \text{ kV}$: $v = 1,9 \times 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $v/c = 6,2\%$. Proton sous la même tension : $v = 4,4 \times 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $\sqrt{m_p/m_e} = 43$ fois moins vite.

✗ **ATTENTION — la limite relativiste**

La formule $v = \sqrt{2|q|U/m}$ est *classique*. Pour un électron sous 1,0 MV elle donne $v = 5,9 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} > c$: c'est absurde. **Contrôler systématiquement** v/c ; au-delà de 10 % environ, le traitement classique n'est qu'indicatif (hors programme).

4 MOUVEMENT DANS UN CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE UNIFORME

Notation. On se place dans le seul cas exigible : $\vec{B} = B \vec{u}_z$ uniforme et stationnaire, $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$, le poids étant négligé et $\vec{E} = \vec{0}$.

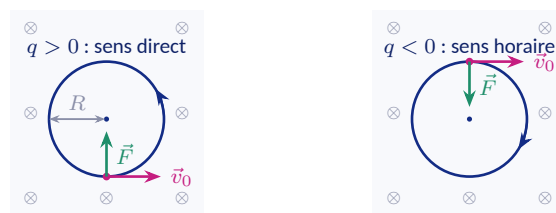
Théorème — mouvement circulaire uniforme. Dans ces conditions, le mouvement est **plan** (dans le plan contenant $\vec{v}_0$ et orthogonal à $\vec{B}$), **uniforme** et **circulaire**, de rayon et de pulsation

$$R = \frac{m v_0}{|q| B} \quad \omega_c = \frac{|q| B}{m} \quad T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m}{|q| B}.$$

Démonstration exigible, en trois temps.

- **Le mouvement est uniforme** : la puissance de la force magnétique est nulle, donc E_c , donc $v = \|\vec{v}\|$, est constante.
- **Le mouvement est plan** : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ est à chaque instant orthogonale à $\vec{B}$, donc $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{u}_z) = 0$: la composante v_z reste nulle, le mouvement se fait dans le plan $z = 0$.
- **Le mouvement est circulaire** : dans le repère de Frenet, $\vec{a} = \dot{v} \vec{T} + \frac{v^2}{\rho} \vec{N}$. Or $\dot{v} = 0$ et $\|\vec{a}\| = \frac{|q| v B}{m}$ (car $\vec{v} \perp \vec{B}$). Donc $\frac{v^2}{\rho} = \frac{|q| v B}{m}$, soit $\rho = \frac{mv}{|q| B}$: le rayon de courbure est constant, la trajectoire est un cercle de rayon $R = \rho$.

Propriété — le sens de parcours. Le centre du cercle est du côté vers lequel pointe la force $q \vec{v} \wedge \vec{B}$, à la distance R . Avec $\vec{B}$ **entrant dans la feuille** : une charge **positive** tourne dans le sens **trigonométrique** (direct), une charge **négative** dans le sens **horaire**. On retrouve le sens en appliquant la règle de la main droite à $\vec{v} \wedge \vec{B}$, puis en tenant compte du signe de q .



$\vec{B}$ entrant dans la feuille

Figure 3 — Même champ, même vitesse initiale : le sens de rotation ne dépend que du signe de q .

Théorème — propriété fondamentale du mouvement cyclotron. La période $T_c = \frac{2\pi m}{|q| B}$ ne dépend **ni de la vitesse, ni du rayon** : elle ne dépend que de la particule et du champ. Toutes les particules identiques tournent « au même rythme », quelle que soit leur énergie. C'est cette propriété — et elle seule — qui rend le cyclotron possible.

Propriété — deux écritures utiles du rayon. En fonction de l'énergie cinétique, ou de la tension d'accélération U_0 :

$$R = \frac{\sqrt{2m E_c}}{|q| B} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m U_0}{|q|}} \propto \sqrt{m}.$$

À U_0 et B fixés, R croît comme $\sqrt{m}$: c'est le principe du spectromètre de masse.

★ EXEMPLE — ordres de grandeur

Électron de 1,0 keV dans $B = 0,10 \text{ T}$: $v = 1,9 \times 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $R = 1,1 \text{ mm}$, $T_c = 0,36 \text{ ns}$. Proton de 1,0 MeV dans $B = 1,0 \text{ T}$: $v = 1,4 \times 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $R = 14 \text{ cm}$, $T_c = 66 \text{ ns}$ ($f_c = 15 \text{ MHz}$).

5 LES APPLICATIONS À CONNAÎTRE

Propriété — accélérateur linéaire. Une succession de tubes conducteurs (où $\vec{E} = \vec{0}$, la particule se contente de glisser) séparés par des intervalles où règne un champ alternatif de fréquence f . La particule traverse chaque intervalle au moment favorable et gagne $|q| U_0$ à chaque fois : après n intervalles, $E_c = n |q| U_0$ et $v_n = \sqrt{2n |q| U_0 / m} \propto \sqrt{n}$. Le tube n doit être parcouru en une demi-période, d'où

$$\ell_n = \frac{v_n}{2f} \propto \sqrt{n} :$$

les tubes s'allongent, et l'accélérateur est long. **C'est le champ électrique, et lui seul, qui accélère.**

Propriété — cyclotron. Deux demi-boîtes (« dees ») plongées dans $\vec{B}$ uniforme, séparées par un intervalle soumis à une tension alternative d'amplitude U_0 . Dans chaque dee le mouvement est circulaire uniforme ; à chaque traversée de l'intervalle la particule gagne $|q| U_0$. Le dispositif fonctionne **si et seulement si** la fréquence du générateur est accordée sur la fréquence cyclotron :

$$f_{\text{HF}} = f_c = \frac{|q| B}{2\pi m} \quad (\text{condition de résonance}).$$

Après n traversées, $R_n = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mnU_0}{|q|}} = R_{\text{max}} \sqrt{n/N}$: la trajectoire est une spirale dont le pas se resserre. L'énergie finale est fixée par le rayon maximal :

$$E_{c,\text{max}} = \frac{q^2 B^2 R_{\text{max}}^2}{2m}, \quad N = \frac{E_{c,\text{max}}}{|q| U_0} \text{ traversées, } \frac{N}{2} \text{ tours.}$$

Limite : lorsque v approche c , T_c n'est plus constante et la synchronisation est perdue (d'où le synchrocyclotron, hors programme).

Propriété — sélecteur de vitesse (filtre de Wien). Champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ **croisés**, tous deux orthogonaux à la vitesse d'entrée. La force totale est nulle si et seulement si $q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, c'est-à-dire

$$v = \frac{E}{B}$$

indépendamment de q et de m : seules les particules de cette vitesse traversent sans être déviées, les autres sont arrêtées par une fente. Le sélecteur ne trie que la vitesse.

Propriété — spectromètre de masse. En amont, une accélération sous U_0 (ou un sélecteur de vitesse) ; en aval, un secteur magnétique où la particule décrit un demi-cercle et frappe un détecteur à la distance $2R$ de la fente. Deux isotopes se séparent de $\Delta(2R) = 2(R_2 - R_1)$, avec $R \propto \sqrt{m}$ (après accélération) ou $R \propto m$ (après sélecteur). **Focalisation à 180°** : pour une divergence $\pm\varepsilon$, les impacts sont à $2R \cos \varepsilon$ de la fente ; l'élargissement $2R(1 - \cos \varepsilon) \approx R\varepsilon^2$ est du *second ordre* — le secteur est auto-focalisant.

Propriété — déviation dans un oscilloscope. Un canon à électrons (accélération sous U_0) suivi de deux paires de plaques orthogonales, puis d'un écran. La sensibilité verticale vaut $\frac{Y}{U} = \frac{LD}{2U_0 d}$ ($\text{m}\cdot\text{V}^{-1}$), indépendante de q et m : augmenter U_0 rend la trace plus lumineuse mais *moins* sensible.

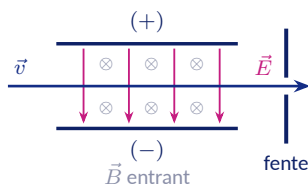


Figure 4 — Sélecteur de vitesse : seules les particules à $v = E/B$ passent, quelles que soient q et m .

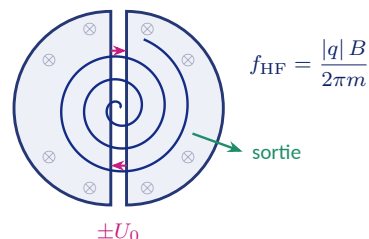


Figure 5 — Cyclotron : accélération dans l'intervalle, demi-cercles dans les dees.

6 DÉMONSTRATIONS À SAVOIR REFAIRE

- **Puissance de la force de Lorentz** : $\mathcal{P} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$, car $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$; conséquence sur E_c .
- **Comparaison des forces** : calculer $|q| E / (mg)$ et $|q| v B / (mg)$, conclure.
- **Mouvement dans $\vec{E}$ uniforme** : $\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$ constante, parabole, y_1 et $\tan \alpha$; $Y = D \tan \alpha$ (D depuis le centre des plaques).
- **Vitesse acquise sous U** : théorème de l'énergie cinétique, $v = \sqrt{2|q|U/m}$; contrôle de v/c .
- **Mouvement circulaire uniforme dans $\vec{B}$** : uniforme (puissance nulle), plan (v_z constante), circulaire (Frenet); $R = mv / (|q| B)$, $\omega_c = |q| B / m$, sens de parcours.
- **Indépendance de T_c vis-à-vis de v** et condition de résonance du cyclotron.
- **Sélecteur de vitesse** : $v = E/B$, indépendance en q et m .
- $R \propto \sqrt{m}$ après accélération sous U_0 : $R = \frac{1}{B} \sqrt{2mU_0/|q|}$.

7 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Évaluer et comparer les ordres de grandeur des forces électrique, magnétique et du poids; justifier que le poids est négligeable (ou non).
- Justifier qu'un champ électrique modifie E_c mais qu'un champ magnétique courbe la trajectoire sans fournir d'énergie.
- Établir les équations du mouvement dans $\vec{E}$ uniforme, reconnaître une accélération constante, obtenir la trajectoire.
- Mener un bilan énergétique pour la vitesse acquise sous une différence de potentiel; convertir en électron-volts; contrôler v/c .
- Déterminer rayon, pulsation, période et *sens de parcours* pour $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ uniforme.
- Exploiter les montages types : accélérateur linéaire, cyclotron, sélecteur de vitesse, spectromètre de masse, oscilloscope.
- Contrôler la cohérence : homogénéité, $v < c$, non-interception des plaques, poids négligeable.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- Force de Lorentz : $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$; puissance : $\mathcal{P} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$.
- Condensateur plan : $E = U/d$; accélération : $\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$; vitesse acquise : $v = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$.
- Déviation : $y(x) = \frac{|q|E}{2mv_0^2} x^2$; $\tan \alpha = \frac{|q|EL}{mv_0^2} = \frac{UL}{2U_0d}$; $Y = D \tan \alpha$; $y_1 \leq d/2$.
- Champ magnétique : $R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU_0}{|q|}}$; $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$; $T_c = \frac{2\pi m}{|q|B}$ (indépendante de v).
- Sélecteur de vitesse : $v = E/B$. Cyclotron : $f_{\text{HF}} = \frac{|q|B}{2\pi m}$, $E_{c,\text{max}} = \frac{q^2 B^2 R_{\text{max}}^2}{2m}$.
- Constantes : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$; $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$; $u = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$; $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$; $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Repères : électron sous 1 kV $\rightarrow 1,9 \times 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; E entre plaques 10^3 à $10^6 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$; B de laboratoire 0,1 à 1 T.

✖ PIÈGES

- Oublier le signe de la charge : un électron est dévié à l'opposé de $\vec{E}$ et tourne dans le sens *inverse* d'un proton dans le même $\vec{B}$. Se tromper dans l'orientation de $\vec{v} \wedge \vec{B}$, ou appliquer la règle de la main droite à $\vec{F}$ au lieu de $\vec{v} \wedge \vec{B}$.
- Croire que le champ magnétique « accélère » la particule : il ne modifie *jamais* $\|\vec{v}\|$, sa puissance est nulle. Dans un cyclotron, c'est le champ *électrique* de l'intervalle qui accélère.
- Confondre U et E : entre deux plaques planes, $E = U/d$, jamais $E = U$.
- Traiter le cas magnétique avec une vitesse initiale quelconque : hors programme, et la trajectoire n'est plus un cercle mais une hélice.
- Négliger le poids sans le dire — ou le négliger alors qu'il ne l'est pas (goutte d'encre). Oublier de vérifier que la particule ne heurte pas une plaque ($y_1 \leq d/2$) : l'énoncé devient faux.
- Utiliser $v = \sqrt{2|q|U/m}$ sans contrôler v/c . Croire que T_c dépend de la vitesse. Écrire $R = |q|B/(mv)$: contrôler l'homogénéité, R est une longueur.