

Fiche de cours Oscillateurs libres et forcés

Oscillateur harmonique, régime libre du second ordre, impédances, régime sinusoïdal forcé et résonance

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

1 L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

Définition. Un système à un degré de liberté x est un **oscillateur harmonique** lorsque x vérifie

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 > 0,$$

où ω_0 est la **pulsation propre** (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$). Les solutions sont

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$$

avec $X_m > 0$ l'**amplitude**, φ la **phase à l'origine**, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ la **période propre** et $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ la **fréquence propre**. Les deux constantes sont fixées par les deux conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$:

$$A = x(0), \quad B = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}, \quad X_m = \sqrt{x(0)^2 + \left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\right)^2}, \quad \tan \varphi = -\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0 x(0)}.$$

Notation. On note $\dot{x} = dx/dt$ et $\ddot{x} = d^2x/dt^2$. La pulsation propre ne dépend *que* du système, jamais des conditions initiales : c'est l'**isochronisme** des oscillations.

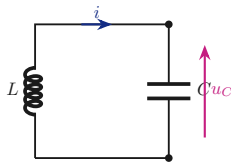


Figure 1 — Circuit LC : $\ddot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

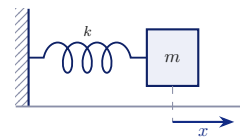


Figure 2 — Masse-ressort : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

★ EXEMPLE — circuit LC

Loi des mailles : $u_L + u_C = 0$ avec $u_L = L di/dt$ et $i = C du_C/dt$, donc $LC \ddot{u}_C + u_C = 0$:

$$\ddot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0, \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$L = 10 \text{ mH}$ et $C = 1,0 \mu\text{F}$ donnent $\omega_0 = 1,0 \times 10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $f_0 = 1,6 \text{ kHz}$ et $T_0 = 0,63 \text{ ms}$.

Remarque. La deuxième loi de Newton (chapitre 9) appliquée à la masse soumise au rappel $-kx$ donne $m\ddot{x} = -kx$. Dans ce chapitre, *toute équation mécanique du mouvement est admise ou fournie* : seul son traitement est exigible ici.

Propriété — énergie. Pour le circuit LC, $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$ est **constante** : en multipliant $LC\ddot{u}_C + u_C = 0$ par $C\dot{u}_C = i$ on obtient $d\mathcal{E}/dt = 0$. L'énergie oscille entre les deux formes à la **pulsation** $2\omega_0$, chacune de moyenne $\mathcal{E}/2$. Idem en mécanique avec $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$.

2 OSCILLATEUR AMORTI : FORME CANONIQUE, ω_0 ET Q

Théorème — forme canonique. Tout oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté s'écrit

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)}$$

où $Q > 0$, sans dimension, est le **facteur de qualité** et f le terme d'excitation. Le second membre en régime permanent constant donne $x_\infty = f/\omega_0^2$.

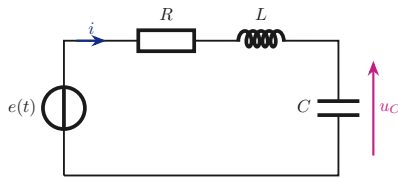
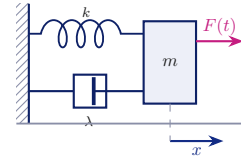


Figure 3 — Circuit RLC série

Figure 4 — Oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux $-\lambda\dot{x}$

Méthode — obtenir la forme canonique. (i) loi des mailles (ou équation du mouvement fournie); (ii) tout exprimer avec une inconnue; (iii) diviser par le coefficient de $\ddot{x}$; (iv) identifier ω_0^2 au coefficient de x et ω_0/Q à celui de $\dot{x}$. Toujours vérifier l'homogénéité : $[\omega_0] = \text{s}^{-1}$, Q sans dimension.

★ **EXEMPLE — RLC série, figure 3**

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C \text{ avec } i = C \frac{du_C}{dt} \text{ donne } LC \ddot{u}_C + RC \dot{u}_C + u_C = e, \text{ soit}$$

$$\ddot{u}_C + \frac{R}{L} \dot{u}_C + \frac{1}{LC} u_C = \frac{e}{LC} \implies \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}}$$

Avec $L = 10 \text{ mH}$, $C = 1,0 \mu\text{F}$: $\sqrt{L/C} = 100 \Omega$, donc $Q = 10$ pour $R = 10 \Omega$ et $Q = 0,10$ pour $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.

Propriété — analogie électromécanique. L'équation $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$ donne $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda} = \frac{m\omega_0}{\lambda}$. Les deux oscillateurs sont **formellement identiques** :

Électrique	q	$i = \dot{q}$	L	R	$1/C$	$e(t)$
Mécanique	x	$v = \dot{x}$	m	λ	k	$F(t)$

Toute formule établie sur l'un se transpose : $\frac{1}{2}Li^2 \leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2$, $\frac{q^2}{2C} \leftrightarrow \frac{1}{2}kx^2$, $Ri^2 \leftrightarrow \lambda v^2$ (puissance dissipée).

3 RÉGIME LIBRE : LES TROIS RÉGIMES

Méthode — racines du polynôme caractéristique. L'équation homogène $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, de discriminant

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2).$$

Le signe de Δ , donc la nature du régime, ne dépend que de Q comparé à $\frac{1}{2}$.

$Q < 1/2$	apériodique	$\Delta > 0$: racines réelles négatives $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$, $x = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}$; retour sans oscillation, d'autant plus lent que Q est petit.
$Q = 1/2$	critique	$\Delta = 0$: racine double $r = -\omega_0$, $x = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$; retour sans oscillation, le plus rapide possible .
$Q > 1/2$	pseudo-périodique	$\Delta < 0$: racines $-\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega$, $x = e^{-\omega_0 t/(2Q)} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$; oscillations amorties.

Définition. Dans le régime pseudo-périodique, la **pseudo-pulsation** et la **pseudo-période** valent

$$\boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} > T_0.$$

$\omega < \omega_0$ toujours : l'amortissement ralentit les oscillations. L'écart relatif vaut $\frac{1}{8Q^2}$ au premier ordre : pour $Q \geq 5$, ω et ω_0 diffèrent de moins de 1 %.

Propriété — durée du régime transitoire. L'enveloppe décroît en $e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{QT_0}{\pi}$, d'où $\Delta t \approx 5\tau = \frac{10Q}{\omega_0}$: le système effectue environ Q/π pseudo-périodes par constante de temps, soit de l'ordre de Q oscillations visibles. **Un grand Q signifie un faible amortissement.** Pour $Q < 1/2$, c'est la racine la plus petite en valeur absolue, r_+ , qui impose la durée : $\Delta t \approx 5/|r_+|$.

Définition. Le **décrément logarithmique** compare deux élongations séparées d'une pseudo-période :

$$\delta = \ln \frac{x(t) - x_\infty}{x(t+T) - x_\infty} = \frac{T}{\tau} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}} \underset{Q \gg 1}{\approx} \frac{\pi}{Q}, \quad \text{plus généralement} \quad \delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t) - x_\infty}{x(t+nT) - x_\infty}.$$

C'est la façon la plus sûre de mesurer Q sur un enregistrement : on l'obtient par $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}}$.

Définition. Le **portrait de phase** est la courbe paramétrée $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ (souvent $\dot{x}/\omega_0$ en ordonnée, pour que les deux axes aient la même unité). Il ne fait pas apparaître le temps mais rend la nature du régime immédiate : **ellipse fermée** (harmonique, énergie constante), **spirale convergente** (pseudo-périodique), **arc unique sans tour complet** (critique et apériodique). Les trajectoires convergent vers le **point attracteur** $(x_\infty, 0)$ et ne se croisent jamais.

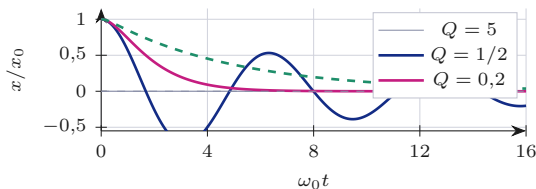


Figure 5 — Régime libre, $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$

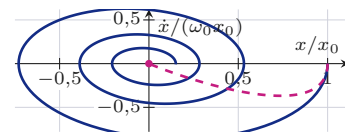


Figure 6 — Portraits de phase : $Q = 5$ (spirale), $Q = 1/2$ (pointillés)

Propriété — bilan énergétique. En multipliant $L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = e$ par $i = \dot{q}$:

$$e i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 + \frac{q^2}{2C} \right) + R i^2.$$

La puissance fournie se répartit entre variation de l'énergie stockée et dissipation Joule, toujours positive. En régime libre $d\mathcal{E}/dt = -Ri^2 \leq 0$: **l'énergie décroît**, ce qui interdit toute oscillation entretenue. Pour $Q \gg 1$ elle décroît en e^{-t/τ_E} avec $\tau_E = \tau/2 = Q/\omega_0$, et $Q \approx 2\pi \times (\text{énergie stockée})/(\text{énergie dissipée par pseudo-période})$.

4 RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ : NOTATION COMPLEXE ET IMPÉDANCES

Définition. Le **régime sinusoïdal forcé** (RSF) est le régime permanent atteint par un circuit linéaire stable excité par une source sinusoïdale, une fois le transitoire éteint (au bout de 5τ). **Toutes** les grandeurs y sont sinusoïdales de même pulsation ω que l'excitation : seules l'amplitude et la phase changent.

Notation. À $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ on associe l'**amplitude complexe** $\underline{u} = U_m e^{j\varphi_u}$, de sorte que $u(t) = \text{Re}(\underline{u} e^{j\omega t})$, avec $j^2 = -1$. Alors

$$\frac{du}{dt} \longleftrightarrow j\omega \underline{u}, \quad \int u dt \longleftrightarrow \frac{\underline{u}}{j\omega}, \quad U_m = |\underline{u}|, \quad \varphi_u = \arg \underline{u}.$$

Dériver, c'est multiplier par $j\omega$: **l'équation différentielle devient une équation algébrique.**

Définition. L'**impédance complexe** d'un dipôle linéaire passif en RSF est $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ (convention récepteur), en Ω ; son inverse est l'**admittance** $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$. On établit, à partir des relations constitutives :

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}, \quad \underline{Z}_L = jL\omega$$

$|\underline{Z}|$ est le rapport des amplitudes, $\arg \underline{Z}$ l'**avance de phase de u sur i** : 0 pour R , $+\pi/2$ pour L (la tension est en avance), $-\pi/2$ pour C (en retard).

Propriété — associations. Les lois de Kirchhoff, les ponts diviseurs et les modèles de Thévenin s'appliquent aux amplitudes complexes, avec les impédances à la place des résistances :

$$\underline{Z}_{\text{série}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2, \quad \underline{Z}_{\text{parallèle}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (\text{c'est-à-dire } \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2).$$

Remarque — domaine de validité. Les impédances n'ont de sens qu'en RSF établi : elles ne décrivent ni le régime transitoire, ni une excitation non sinusoïdale (il faut alors la décomposer en série de Fourier, chapitre 6). Et l'on n'additionne jamais des amplitudes réelles : on additionne les complexes.

Méthode — résoudre un problème de RSF. (i) remplacer chaque dipôle par son impédance ; (ii) traiter le circuit comme un circuit résistif en complexes (diviseur de tension, loi des mailles) ; (iii) prendre le module pour l'amplitude, l'argument pour la phase, puis revenir au réel. Pour un quotient, calculer séparément $|\text{numérateur}|$ et $|\text{dénominateur}|$: ne jamais développer le module d'une somme.

5 RÉSONANCES DU RLC SÉRIE

Propriété — intensité. Avec $e(t) = E_m \cos \omega t$, $i = \frac{e}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$, donc en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$I_m(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{E_m/R}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}, \quad \varphi_i = -\arctan\left[Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right].$$

Il y a **toujours résonance en intensité**, quelle que soit la valeur de Q , et elle a lieu **exactement en** $\omega = \omega_0$: le circuit est alors purement résistif ($Z = R$), u_L et u_C se compensent, i est **en phase** avec e et $I_{m,\max} = E_m/R$.

Définition. La **bande passante** (à -3 dB) est l'ensemble des pulsations telles que $I_m \geq I_{m,\max}/\sqrt{2}$, c'est-à-dire telles que la puissance moyenne dissipée soit au moins la moitié du maximum. Elle est encadrée par les pulsations de coupure $\omega_1 < \omega_2$, et

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{soit} \quad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}, \quad \omega_1\omega_2 = \omega_0^2.$$

Ce résultat est *exact*. Plus Q est grand, plus la résonance est **aiguë** (sélective) : Q mesure l'**acuité de la résonance**. C'est la deuxième méthode de mesure de Q , après le décrément logarithmique.

Propriété — charge ou tension du condensateur. $u_C = \frac{e}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$, donc

$$U_{Cm}(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}.$$

Il y a résonance **si et seulement si** $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, et alors, en annulant la dérivée du dénominateur :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega \text{ (pseudo)} < \omega_0, \quad U_{Cm,\max} = \frac{QE_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Pour $Q \gg 1$, $\omega_r \rightarrow \omega_0$ et $U_{Cm,\max} \approx QE_m$: c'est le **phénomène de surtension**, qui peut détruire un composant ($Q = 50$, $E_m = 5$ V $\Rightarrow$ 250 V). Enfin $U_{Cm} \rightarrow E_m$ en basse fréquence et $U_{Cm} \rightarrow 0$ en haute fréquence.

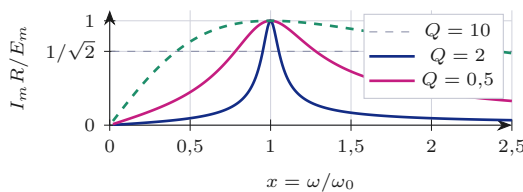


Figure 7 — Résonance en intensité : toujours en $x = 1$

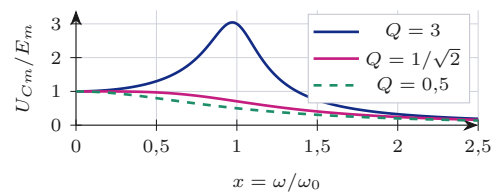


Figure 8 — Résonance en charge : seulement si $Q > 1/\sqrt{2}$

Remarque. Par l'analogie, la **résonance en vitesse** d'un oscillateur mécanique a toujours lieu en ω_0 (comme l'intensité) et la **résonance en élongation** seulement si $Q > 1/\sqrt{2}$, en $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$ (comme la charge). Les trois pulsations se rangent dans l'ordre $\omega_r < \omega < \omega_0$.

6 PUISSANCE EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

Définition. La **valeur efficace** d'une grandeur sinusoïdale d'amplitude U_m est $U = U_m/\sqrt{2}$: c'est la valeur constante qui dissiperait la même puissance dans une résistance.

Théorème — puissance moyenne. Pour $u = U_m \cos(\omega t)$ et $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, où $\varphi = \arg Z$ est l'avance de phase de u sur i , la puissance instantanée $p = ui$ a pour moyenne sur une période $\mathcal{P} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = U I \cos \varphi$ où $\cos \varphi$ est le **facteur de puissance**. Démonstration : $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$, et la moyenne du terme en $2\omega t$ est nulle.

Propriété — conséquences. $\mathcal{P} = \frac{1}{2} R I_m^2 = R I^2$: **seules les résistances consomment**, la puissance moyenne reçue par L et C étant nulle (elles stockent puis restituent). Pour le RLC série,

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{R E_m^2 / 2}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} = \frac{\mathcal{P}_{\max}}{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}, \quad \mathcal{P}_{\max} = \frac{E_m^2}{2R} \text{ en } \omega = \omega_0.$$

La bande passante est donc exactement l'intervalle où $\mathcal{P} \geq \mathcal{P}_{\max}/2$ (d'où le nom de **pulsations de demi-puissance**). Un $\cos \varphi$ faible signifie un courant élevé pour une puissance utile donnée, donc des pertes en ligne : on le relève en plaçant un condensateur en parallèle sur une installation inductive.

7 CAPACITÉ NUMÉRIQUE : RÉSOUDRE NUMÉRIQUEMENT L'ÉQUATION DU SECOND ORDRE

Méthode — système du premier ordre. On ne discrétise jamais $\ddot{x}$ directement : on pose $v = \dot{x}$ et on écrit le système

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = f(t) - \frac{\omega_0}{Q} v - \omega_0^2 x,$$

auquel on applique le schéma d'Euler explicite, composante par composante. Le tracé de v en fonction de x donne le **portrait de phase**.

```
1 import numpy as np
2 w0, Q = 1.0e4, 10.0          # pulsation propre (rad/s) et facteur de qualite
3 h = 2 * np.pi / w0 / 500    # pas : 500 points par periode propre
4 t = np.arange(0.0, 20e-3, h)
5 x = np.zeros(len(t)); v = np.zeros(len(t))
6 x[0], v[0] = 1.0, 0.0        # conditions initiales : x(0) = 1, xpoint(0) = 0
7
8 def f(u):                     # excitation : 0.0 en regime libre
9     return 0.0
10 for k in range(len(t) - 1):
11     x[k + 1] = x[k] + h * v[k]
12     v[k + 1] = v[k] + h * (f(t[k]) - w0 / Q * v[k] - w0**2 * x[k])
```

Remarque. Le pas doit être petit devant la *plus petite* échelle de temps, ici $T_0 = 2\pi/\omega_0$: prendre $h \leq T_0/100$. Avec un pas trop grand, le schéma d'Euler explicite *augmente* artificiellement l'énergie et la spirale s'ouvre au lieu de converger.

8 DÉMONSTRATIONS EXIGIBLES ET SAVOIR-FAIRE

★ EXEMPLE — les démonstrations à savoir refaire

- **Équations du LC et du RLC série**, forme canonique, identification de ω_0 et Q , contrôle d'homogénéité.
- **Régime libre** : équation caractéristique, signe de Δ selon Q , les trois formes de solution, constantes par $x(0)$ et $\dot{x}(0)$; **pseudo-pulsation** $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)}$ et **décroissement** $\delta = \pi/\sqrt{Q^2 - 1/4}$.
- **Énergie** : conservation pour le LC, $d\mathcal{E}/dt = -Ri^2$ pour le RLC.
- **Impédances** de R , L , C à partir des relations constitutives en représentation complexe.
- **Résonance en intensité** en ω_0 et **bande passante** $\Delta\omega = \omega_0/Q$ (résolution de $Q|x - 1/x| = 1$); **condition** $Q > 1/\sqrt{2}$ et $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$ pour la charge (minimisation de $(1 - x^2)^2 + x^2/Q^2$).
- **Puissance moyenne** $\mathcal{P} = UI \cos \varphi$ et nullité de la puissance moyenne reçue par L et C .

► SAVOIR-FAIRE

- Établir l'équation d'un oscillateur, la mettre sous forme canonique, en tirer ω_0 et Q , prévoir la nature du régime et la durée du transitoire ($\approx 10Q/\omega_0$, soit de l'ordre de Q oscillations visibles).
- Résoudre un régime libre ou une réponse à un échelon par les racines du polynôme caractéristique, avec *deux* conditions initiales (u_C et i_L continues).
- Mesurer ω_0 et Q sur un relevé temporel (pseudo-période, décroissement logarithmique) ou sur des courbes de résonance (position du maximum, bande passante, courbe de phase).
- Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente et utiliser un diviseur de tension en complexes; établir l'amplitude et la phase d'une grandeur en RSF, discuter l'existence d'une résonance, calculer un facteur de surtension.
- Calculer une valeur efficace, une puissance moyenne, un facteur de puissance; relier bande passante et demi-puissance.
- Transposer un résultat électrique en résultat mécanique par l'analogie, et réciproquement; écrire le schéma d'Euler d'un système du second ordre et tracer un portrait de phase.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- Forme canonique : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$. RLC série : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Mécanique : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$.
- Régimes : $Q < \frac{1}{2}$ apériodique ; $Q = \frac{1}{2}$ critique ($R_c = 2\sqrt{L/C}$) ; $Q > \frac{1}{2}$ pseudo-périodique, $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.
- Amortissement : enveloppe en $e^{-\omega_0 t/(2Q)}$, $\tau = 2Q/\omega_0$, $\delta = T/\tau = \pi/\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}} \approx \pi/Q$. Énergies : $\frac{1}{2}Li^2$, $\frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{q^2}{2C}$, $\frac{1}{2}mv^2$, $\frac{1}{2}kx^2$; dissipation Ri^2 ou λv^2 .
- Impédances : $\underline{Z}_R = R$, $\underline{Z}_L = jL\omega$, $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$; série : somme des $\underline{Z}$; parallèle : somme des $\underline{Y}$.
- Résonances : intensité toujours en ω_0 , $\Delta\omega = \omega_0/Q$, $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$; charge si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, en $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, amplitude $QE_m/\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.
- Puissance : $U = U_m/\sqrt{2}$, $\mathcal{P} = UI \cos \varphi = RI^2$, $\mathcal{P}_{\max} = E_m^2/(2R)$ en ω_0 .
- Repères : $L = 10 \text{ mH}$, $C = 1,0 \mu\text{F} \Rightarrow \omega_0 = 1,0 \times 10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $f_0 = 1,6 \text{ kHz}$, $\sqrt{L/C} = 100 \Omega$, $R_c = 200 \Omega$. Diapason $Q \sim 10^3$, quartz $Q \sim 10^5$, pendule de TP $Q \sim 10$ à 10^2 .

✖ PIÈGES

- Placer Q au mauvais endroit dans la forme canonique : le coefficient de $\dot{x}$ est ω_0/Q , donc un grand Q = un faible amortissement.
- Confondre ω_0 (pulsation propre), ω (pseudo-pulsation, régime libre) et ω_r (pulsation de résonance en charge ou en élongation) : $\omega_r < \omega < \omega_0$.
- Croire que la résonance en élongation ou en charge a lieu en ω_0 , ou qu'elle existe toujours : il faut $Q > 1/\sqrt{2}$.
- Utiliser une impédance en régime transitoire ou pour une excitation non sinusoïdale ; additionner des amplitudes réelles au lieu des complexes ; oublier le $j\omega$ de la dérivation ; écrire $|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2| = |\underline{Z}_1| + |\underline{Z}_2|$; sommer des impédances en parallèle sans passer par les admittances.
- Se tromper de signe sur le déphasage : $\arg \underline{Z}$ est l'avance de u sur i , et vaut $-\pi/2$ pour un condensateur. Oublier une condition initiale : le second ordre exige $x(0)$ et $\dot{x}(0)$, c'est-à-dire la continuité de u_C et celle de i_L .
- Dire qu'un régime pseudo-périodique est périodique : son amplitude décroît. Confondre valeur efficace et amplitude ($\sqrt{2}$ pour une sinusoïde seulement), ou écrire $\mathcal{P} = UI$ sans le facteur de puissance.
- Mesurer Q sur une résonance tronquée par la saturation du GBF, ou oublier que la résistance interne du GBF et celle de la bobine s'ajoutent à R (le Q mesuré est toujours inférieur au Q calculé). En simulation, discrétiser $\ddot{x}$ directement au lieu de passer par le système (x, v) , ou prendre h comparable à T_0 .