

Fiche de cours

Mouvement d'un solide

Solide indéformable, translation, rotation autour d'un axe fixe, moment d'inertie, théorème scalaire du moment cinétique, pendule pesant

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

1 LE MODÈLE DU SOLIDE ; TRANSLATION

Définition. Un **solide** (ou solide indéformable) est un système dont la distance entre deux points quelconques reste constante : $\|\vec{AB}\| = \text{cte}$ pour tous points A, B du système. Sinon le système est **déformable**. On note G son centre de masse, m sa masse, et Δ un axe **orienté** par $\vec{u}$; le référentiel $\mathcal{R}$ est supposé galiléen.

Remarque. Solides : bille, tige rigide, volant d'inertie, poulie. Déformables : ressort, fil souple, gaz, cycliste qui pédale. **Pour un système déformable, ni $L_\Delta = J_\Delta \omega$ ni $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ n'ont de sens.**

Définition. Un solide est en **translation** si, à chaque instant, **tous ses points ont le même vecteur vitesse** : les trajectoires sont superposables et aucune direction liée au solide ne tourne. Elle est **rectiligne** (ascenseur) ou **circulaire** (nacelle de grande roue, qui décrit un cercle *sans tourner*). Tout se ramène alors au point matériel : $m \vec{a}(G) = \sum_k \vec{F}_k$ et $E_c = \frac{1}{2} m v(G)^2$.

Remarque — les deux seuls mouvements au programme. **Translation** et **rotation autour d'un axe fixe** du référentiel galiléen. Sont **hors programme** : le mouvement composé (translation de G et rotation autour d'un axe mobile), le roulement sans glissement, tout axe de rotation en mouvement. Et **translation circulaire $\neq$ rotation** : dans une rotation, les points n'ont pas la même vitesse.

2 ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

Définition. Un solide est en **rotation autour de l'axe fixe Δ** si ses points situés sur Δ sont immobiles. On le repère par l'angle θ dont a tourné une demi-droite du solide perpendiculaire à Δ ; la **vitesse angulaire** est $\omega = \dot{\theta}$ (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$), algébrique, positive dans le sens direct autour de $\vec{u}$.

Théorème — vitesse d'un point. Soit M un point du solide, H son projeté orthogonal sur Δ , et $r = HM$ sa **distance à l'axe**. Alors M décrit le cercle de centre H , de rayon r , dans le plan perpendiculaire à Δ passant par M , et

$$\vec{v}(M) = r \omega \vec{u}_\theta \quad \text{soit} \quad v(M) = r |\omega|.$$

Tous les points ont la même vitesse angulaire ω , mais des vitesses différentes, proportionnelles à r : un point de l'axe est immobile, l'extrémité d'une pale va vite.

Notation. Pour une fréquence de rotation n en tours par minute, $\omega = 2\pi n/60 : 3\,000 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1} = 314 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 9,55 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$. **Ne pas confondre ω ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) et $f = \omega/2\pi$ (Hz).**

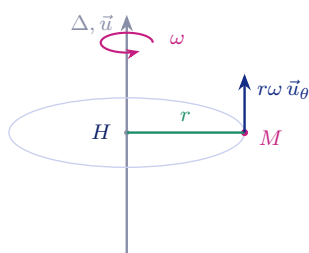


Figure 1 — M décrit un cercle de rayon $r = HM$ à la vitesse $r\omega$.

Solide homogène, axe Δ	J_Δ — fourni
Masse ponctuelle à la distance r	$m r^2$
Cerceau, cylindre creux mince	$m R^2$
Disque, cylindre plein	$\frac{1}{2} m R^2$
Sphère pleine, axe diamétral	$\frac{2}{5} m R^2$
Tige ℓ , axe $\perp$ par le milieu	$\frac{1}{12} m \ell^2$
Tige ℓ , axe $\perp$ par une extrémité	$\frac{1}{3} m \ell^2$

Tableau 1 — Cerceau et disque de même masse et même rayon : rapport 2; tige, selon l'axe : rapport 4.

3 MOMENT D'INERTIE, MOMENT CINÉTIQUE SCALAIRE

Définition. En décomposant le solide en points matériels M_i de masses m_i à la distance r_i de Δ , le **moment d'inertie par rapport à l'axe Δ** est

$$J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2 \quad (\text{kg}\cdot\text{m}^2),$$

grandeur **positive** et **additive** (deux parties, même axe), indépendante du mouvement.

✖ **ATTENTION** — Toujours fourni

Aucun calcul de moment d'inertie par intégration n'est exigible : pour un solide continu, J_Δ est **systématiquement donné par l'énoncé** ; seul le calcul direct $\sum_i m_i r_i^2$ pour quelques masses ponctuelles est attendu. Reste exigible le **lien qualitatif** : J_Δ mesure l'**inertie de rotation** et, à masse donnée, il est d'autant plus grand que la matière est **éloignée de l'axe**.

Théorème — moment cinétique scalaire. Pour un solide en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe fixe Δ : $L_\Delta = J_\Delta \omega$ en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. *Démonstration (exigible, cas discret).* Chaque M_i décrit un cercle de rayon r_i : son moment cinétique par rapport à Δ vaut $m_i r_i^2 \dot{\theta}$ (résultat en coordonnées polaires du chapitre 15). Par additivité, $L_\Delta = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta} = J_\Delta \omega$, car ω **est commune à tous les points**.

Remarque. L_Δ est **algébrique**, du signe de ω : réorienter Δ change le signe de ω et de L_Δ , jamais celui de J_Δ .

4 COUPLE ET LIAISON PIVOT

Définition. Un **couple** est un ensemble de forces de **résultante nulle** et de **moment résultant non nul**. Ce moment Γ (en $\text{N} \cdot \text{m}$) est alors **indépendant du point** où on le calcule : un couple fait tourner le solide sans le déplacer. Exemples : couple moteur, tournevis, rappel d'un fil de torsion $\Gamma = -C\theta$, frottement fluide $\Gamma = -f\omega$.

Définition. Une **liaison pivot** d'axe Δ n'autorise que la rotation autour de Δ . Le moment par rapport à Δ de l'action qu'elle exerce est **nul** si elle est **parfaite** (aucun frottement, aucune dissipation), **non nul et de signe opposé à ω** si elle est **imparfaite** : couple de frottement **fluide** $-f\omega$ ($f > 0$, en $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$) ou **solide** de valeur absolue constante Γ_0 .

Remarque — ce que le pivot annule — et ce qu'il n'annule pas. Même parfaite, une liaison pivot exerce une **force** (la réaction de l'axe) en général **non nulle** : c'est elle qui maintient l'axe. Ce qui est nul, c'est le **moment de cette action par rapport à Δ** . Il faut **toujours le dire explicitement** ; c'est tout l'intérêt du TMC scalaire : la réaction de l'axe, inconnue, disparaît de l'équation.

5 THÉORÈME SCALAIRE DU MOMENT CINÉTIQUE

Théorème — TMC scalaire pour un solide. Dans un référentiel **galiléen**, pour un **solide** en rotation autour d'un axe Δ **fixe** dans ce référentiel, de moment d'inertie J_Δ **constant** :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} = \sum_k \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_k^{\text{ext}})$$

la somme ne portant que sur les forces **extérieures** (le moment résultant des forces intérieures à un solide est nul : admis) ; un couple extérieur Γ contribue pour Γ .

Méthode — mise en équation. (i) définir le système, le référentiel galiléen et **orienter Δ** ; (ii) écrire $L_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}$; (iii) bilan des moments par rapport à Δ des forces extérieures, en annonçant ceux qui sont nuls et **pourquoi** ; (iv) écrire $J_\Delta \ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta$ et ordonner.

✖ **ATTENTION** — L'erreur fatale du chapitre

La deuxième loi de Newton ne donne pas l'équation du mouvement d'un solide en rotation : elle ne renseigne que sur le mouvement de G , souvent immobile (volant) ou imposé par la liaison. L'équation s'obtient par le **TMC scalaire**, ou de façon équivalente par le **TEC**.

6 ÉNERGIE CINÉTIQUE, PUISSANCE D'UN COUPLE, THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Théorème — énergie cinétique de rotation. $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ *Démonstration.* $E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (\sum_i m_i r_i^2) \omega^2$, ω étant commune à tous les points.

Théorème — puissance d'un couple. $\mathcal{P} = \Gamma \omega$ (en W), et plus généralement $\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \omega$. Un couple de frottement fluide a une puissance $\mathcal{P} = -f\omega^2 \leq 0$: il dissipe toujours. Celle de la réaction d'un **pivot parfait est nulle**.

Théorème — TEC et équivalence avec le TMC. $\frac{dE_c}{dt} = (\sum_k \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_k)) \omega$, soit $\Delta E_c = \sum_k W_k$ avec $W = \int \mathcal{M}_\Delta d\theta$. *Équivalence (exigible).* En dérivant $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$: $\frac{dE_c}{dt} = J_\Delta \dot{\theta} \ddot{\theta} = (J_\Delta \ddot{\theta}) \omega$. **Le TEC est le TMC multiplié par ω** ; réciproquement on divise par $\omega \neq 0$: pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, **les deux théorèmes sont équivalents**. On préfère le TEC si les forces sont conservatives ou de travail connu, le TMC pour l'équation différentielle.

Remarque — exemple : couple constant. Un moteur de couple $\Gamma = 100 \text{ N}\cdot\text{m}$ entraîne par un pivot parfait un rotor de moment d'inertie $J = 0,50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$: le TMC donne $J\ddot{\theta} = \Gamma$, donc $\dot{\omega} = \Gamma/J = 200 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$ et ω croît linéairement. À $\omega = 300 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (atteinte en 1,5 s) : $\mathcal{P} = \Gamma\omega = 30 \text{ kW}$ et $E_c = \frac{1}{2}J\omega^2 = 22,5 \text{ kJ}$.

7 LE PENDULE PESANT

Définition. Un **pendule pesant** est un solide mobile autour d'un axe **horizontal** fixe Δ ne passant **pas** par son centre de masse G . On note $d = HG > 0$ la distance de G à l'axe, J le moment d'inertie par rapport à Δ (fourni), θ l'angle entre $\overrightarrow{HG}$ et la verticale descendante.

Théorème — équation du mouvement. Le poids s'applique au **centre de masse** : son moment par rapport à Δ vaut $-mgd \sin \theta$ (bras de levier $d|\sin \theta|$, signe de rappel) ; celui de la liaison pivot, supposée parfaite, est nul. Le TMC scalaire donne

$$\boxed{J\ddot{\theta} = -mgd \sin \theta} \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}.$$

Théorème — petites oscillations, longueur équivalente. Pour $|\theta| \ll 1$, $\sin \theta \simeq \theta$: l'oscillateur est harmonique et

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{\text{eq}}}{g}}}, \quad \boxed{\ell_{\text{eq}} = \frac{J}{md}}$$

ℓ_{eq} est la **longueur équivalente** : le pendule pesant bat comme le *pendule simple* de longueur ℓ_{eq} . **La période ne vaut ni $2\pi\sqrt{d/g}$ ni $2\pi\sqrt{\ell/g}$** pour une longueur ℓ quelconque du solide ; tige d'axe extrémité : $\ell_{\text{eq}} = \frac{2}{3}\ell$.

Théorème — intégrale première. En multipliant l'équation par $\dot{\theta}$: $J\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgd\dot{\theta}\sin \theta = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgd\cos \theta\right] = 0$, donc, avec $E_p = 0$ en bas,

$$\boxed{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgd(1 - \cos \theta) = E_m = \text{cte}}$$

L'intégrale première du mouvement est la conservation de l'énergie mécanique. Lâché sans vitesse de θ_0 :

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_0), \quad \left|\dot{\theta}\right|_{\text{max}} = 2\omega_0 \sin \frac{\theta_0}{2} \quad (\text{atteint en } \theta = 0).$$

Théorème — portrait de phase. Les trajectoires de phase sont les courbes d'équation $\dot{\theta}^2/\omega_0^2 = 2\cos \theta + \text{cte}$. En posant $E^* = 2mgd$ (énergie de la position haute) :

- $E_m < E^*$: **courbes fermées** autour de $(0, 0)$, qui est un **centre** — le pendule **oscille** entre $\pm\theta_0$;
- $E_m = E^*$: la **séparatrice** $\dot{\theta} = \pm 2\omega_0 \cos(\theta/2)$, joignant les **points selles** $(\pm\pi, 0)$ (équilibres instables) : le pendule tend vers la position haute sans l'atteindre, en un temps infini ;
- $E_m > E^*$: **courbes ouvertes**, $\dot{\theta}$ de signe constant — régime **révolutif**.

Lancé de la position basse avec $\dot{\theta}_0$, le pendule fait donc le tour si et seulement si $\boxed{|\dot{\theta}_0| > 2\omega_0}$

Théorème — non-isochronisme. La période *exacte* dépend de l'amplitude :

$$\boxed{T(\theta_0) = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11\theta_0^4}{3072} + \dots\right)} \quad (\theta_0 \text{ en radians}).$$

Le pendule pesant n'est pas isochrone : il est d'autant plus lent que l'amplitude est grande ($+0,19\%$ à 10° , $+0,43\%$ à 15° , $+0,77\%$ à 20° , $+1,7\%$ à 30° , $+7,3\%$ à 60° ; $T \rightarrow +\infty$ si $\theta_0 \rightarrow \pi$). L'isochronisme de Galilée n'est qu'une **propriété de l'approximation linéaire** : une horloge à balancier doit travailler à amplitude faible et constante.

Propriété — frottements : l'énergie mécanique décroît. Avec un pivot imparfait, $J\ddot{\theta} = -mgd \sin \theta - f\dot{\theta}$; en multipliant par $\dot{\theta}$, $\frac{dE_m}{dt} = -f\dot{\theta}^2 \leq 0$: E_m **décroît**, strictement dès que le pendule bouge. Les oscillations s'amortissent, le pendule s'immobilise en $\theta = 0$, et la trajectoire de phase est une **spirale convergeant vers l'origine**. Aux petites oscillations on retrouve l'oscillateur amorti du chapitre 5, de facteur de qualité $Q = J\omega_0/f$.

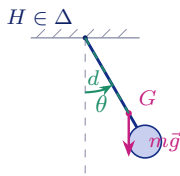


Figure 2 — Pendule pesant : $d = HG$, θ compté depuis la verticale descendante.

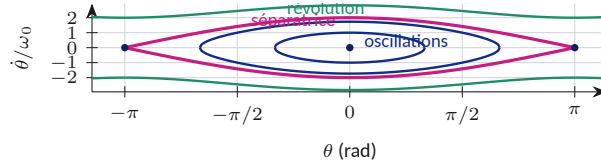


Figure 3 — Portrait de phase : courbes fermées (oscillations), séparatrice $\dot{\theta} = \pm 2\omega_0 \cos(\theta/2)$, courbes ouvertes (révolution).

8 CAPACITÉ NUMÉRIQUE : METTRE EN ÉVIDENCE LE NON-ISOCHRONISME

Méthode — intégration pas à pas. On écrit $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta$ comme un système du premier ordre sur $(\theta, \dot{\theta})$. Le schéma d'**Euler semi-implicite** — vitesse d'abord, puis position avec la vitesse actualisée — conserve l'énergie, alors qu'Euler explicite la fait dériver et fausse la période. Deux changements de signe consécutifs de $\dot{\theta}$ sont séparés d'une demi-période.

```
1 import numpy as np
2 w0, h = 1.0, 1.0e-4 # pulsation propre, pas de temps
3 def periode(th0): # lache sans vitesse depuis th0
4     th, thp, t, pas = th0, 0.0, 0.0, [] # Euler semi-implicite :
5     while len(pas) < 2: # vitesse d'abord, puis position
6         thp, th2 = thp - h * w0**2 * np.sin(th), th + h * thp
7         if th * th2 < 0: pas.append(t) # passage par theta = 0
8         th, t = th2, t + h
9     return 2 * (pas[1] - pas[0]) # deux passages = T/2
10 print([periode(np.radians(a)) / (2 * np.pi / w0) for a in [5, 20, 45, 90]])
```

► SAVOIR-FAIRE — Démonstrations exigibles et savoir-faire

- **Distinguer** solide et système déformable; reconnaître translation rectiligne, translation circulaire, rotation; $v = r\omega$ et conversions $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1} \leftrightarrow \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \leftrightarrow \text{Hz}$. Définir couple et liaison pivot, justifier la nullité du moment d'un pivot parfait.
- Établir $L_\Delta = J_\Delta \omega$ et $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ par additivité; relier qualitativement J_Δ à la répartition des masses; **TMC scalaire** : mise en équation (pendule pesant, treuil, volant entraîné, poulie et masse suspendue, freinage); **équivalence TMC** $\leftrightarrow$ **TEC**; $\mathcal{P} = \Gamma \omega$; $dE_m/dt = -f\dot{\theta}^2$.
- **Pendule pesant** : équation, T_0 et ℓ_{eq} , intégrale première, $\left| \dot{\theta} \right|_{\text{max}}$, condition de révolution, portrait de phase, non-isochronisme.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- $\omega = \dot{\theta}$; $v(M) = r|\omega|$ avec r distance à l'axe; $\omega = 2\pi n/60$ pour n en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$; $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$ (fourni pour un solide continu); $L_\Delta = J_\Delta \omega$; $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$.
- TMC scalaire : $J_\Delta \ddot{\theta} = \sum_k \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_k^{\text{ext}})$ ($\mathcal{R}$ galiléen, Δ fixe, J_Δ constant); $\text{TEC} = \text{TMC} \times \omega$.
- $\mathcal{P} = \Gamma \omega$; pivot parfait : $\mathcal{M}_\Delta = 0$, $\mathcal{P} = 0$; frottement fluide : $\Gamma = -f\omega$, $\mathcal{P} = -f\omega^2$; $dE_m/dt = -f\dot{\theta}^2$.
- Pendule pesant : $J\ddot{\theta} = -mgd \sin \theta$; $\omega_0 = \sqrt{mgd/J}$; $T_0 = 2\pi \sqrt{J/(mgd)} = 2\pi \sqrt{\ell_{\text{eq}}/g}$, $\ell_{\text{eq}} = J/(md)$.
- Intégrale première : $\frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + mgd(1 - \cos \theta) = E_m$; $\left| \dot{\theta} \right|_{\text{max}} = 2\omega_0 \sin(\theta_0/2)$; révolution si $\left| \dot{\theta}_0 \right| > 2\omega_0$.
- Non-isochronisme : $T = T_0(1 + \theta_0^2/16 + 11\theta_0^4/3072 + \dots)$, $+0,77\%$ à 20° . Repères : roue de vélo $J \approx 0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; moteur $\Gamma \approx 100 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\omega \approx 300 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\mathcal{P} = 30 \text{ kW}$.

✗ PIÈGES

- Appliquer la **deuxième loi de Newton** pour obtenir l'équation du mouvement d'un solide en rotation : c'est le TMC scalaire (ou le TEC) qu'il faut. Oublier de dire que le moment de l'action du pivot est nul *parce que la liaison est parfaite* — ou croire que la force de liaison est nulle.
- Écrire $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ pour un solide en rotation; confondre J et m ; prendre pour r la distance à un *point* de l'axe; confondre ω ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$), f (Hz) et n ($\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$).
- Utiliser $T_0 = 2\pi \sqrt{\ell/g}$ (pendule simple) au lieu de $2\pi \sqrt{J/(mgd)}$; calculer le moment du poids ailleurs qu'au **centre de masse**; oublier le bras de levier $d \sin \theta$.
- Supposer l'isochronisme aux grandes amplitudes; traiter un solide dont l'**axe est mobile** (cylindre qui roule, yo-yo) : **hors programme**; utiliser $L_\Delta = J_\Delta \omega$ pour un **déformable**.