

Fiche de cours

Moment cinétique et forces centrales

Moment d'une force, moment cinétique, théorème du moment cinétique, champ de force centrale conservatif, lois de Kepler

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

1 MOMENT D'UNE FORCE

Définition. Soit un point matériel M soumis à une force $\vec{F}$ et soit O un point de l'espace. Le **moment de $\vec{F}$ par rapport au point O** est le vecteur $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$, en $\text{N}\cdot\text{m}$. Il dépend du point choisi : **un moment n'a aucun sens si l'on ne précise pas le point** (ou l'axe) de référence.

Définition. Soit Δ un axe **orienté** passant par O , de vecteur unitaire $\vec{u}$. Le **moment de $\vec{F}$ par rapport à Δ** est le scalaire $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}$. Il ne dépend pas du point O choisi sur l'axe : si $O' \in \Delta$, $\vec{O'O}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $(\vec{O'O} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} = 0$ (produit mixte de deux vecteurs colinéaires).

Théorème — bras de levier. Décomposons $\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$ en composantes parallèle et orthogonale à Δ . Seule $\vec{F}_\perp$ contribue, et

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F_\perp \times d$$

où d , le **bras de levier**, est la distance de l'axe Δ à la droite d'action de $\vec{F}_\perp$. Le signe est $+$ si $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens positif autour de Δ (règle de la main droite appliquée à $\vec{u}$), $-$ sinon.

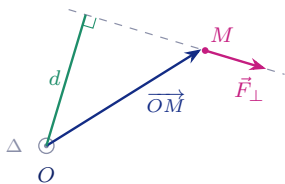


Figure 1 — L'axe Δ sort de la feuille ; d est la distance de O à la droite d'action.

✖ ATTENTION — Trois moments nuls, trois raisons

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$ si et seulement si $\vec{F}$ est **parallèle** à l'axe, ou si sa droite d'action coupe l'axe ($d = 0$), ou si $\vec{F} = \vec{0}$. **Un moment nul n'implique donc pas une force nulle** : le poids d'un pendule a un moment nul en position basse sans être nul.

★ EXEMPLE — les deux méthodes donnent le même résultat

M décrit le cercle de centre O et de rayon R du plan (Oxy) , repéré par θ , $\Delta = (Oz)$ étant orienté par $\vec{u}_z$ et le poids valant $-mg\vec{u}_y$. **Produit vectoriel** : $\vec{OM} = R \cos \theta \vec{u}_x + R \sin \theta \vec{u}_y$ donne $\vec{M}_O(\vec{P}) = -mgR \cos \theta \vec{u}_z$. **Bras de levier** : $d = R |\cos \theta|$, et le poids fait décroître θ quand $\cos \theta > 0$: $\mathcal{M}_{Oz} = -mgR \cos \theta$.

2 MOMENT CINÉTIQUE

Définition. Le **moment cinétique** en O d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{OM} \wedge \vec{p} \quad (\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}),$$

et son moment cinétique par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u})$ est le scalaire $L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}$. Pour un **système discret** de points, les deux grandeurs sont **additives** : $\vec{L}_O(S) = \sum_i \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$.

Propriété — lecture géométrique. $\vec{L}_O$ est **orthogonal au plan** $(O, \vec{OM}, \vec{v})$, son sens est donné par la règle de la main droite appliquée à la rotation de M autour de O , et $\|\vec{L}_O\| = mvd$ où d est la distance de O à la droite support de $\vec{v}$. Donc $\vec{L}_O = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{v} = \vec{0}$ ou si le support de $\vec{v}$ passe par O : **un mouvement rectiligne dont le support passe par O a un moment cinétique nul en O** . Le **caractère algébrique** de L_Δ donne le sens de rotation : $L_\Delta > 0$ signifie que M tourne autour de Δ dans le sens positif.

Propriété — en coordonnées polaires. Pour un mouvement du plan (Oxy) , $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, donc

$$\vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \quad \text{soit} \quad L_{Oz} = m r^2 \dot{\theta}.$$

La composante radiale de la vitesse ne contribue pas au moment cinétique en O ; pour un cercle de rayon R , $L_{Oz} = mR^2\dot{\theta}$.

3 THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

Théorème — TMC en un point fixe. Dans un référentiel **galiléen** $\mathcal{R}$, soit O un point **fixe** de $\mathcal{R}$. Pour un point matériel de masse constante soumis aux forces $\vec{F}_k$:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_k \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_k) \quad \text{et, sur un axe fixe,} \quad \frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_k \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_k).$$

Démonstration (exigible). $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a}$, car O est fixe donc $d\overrightarrow{OM}/dt = \vec{v}$; la deuxième loi de Newton donne $m\vec{a} = \sum_k \vec{F}_k$.

Méthode — utiliser le TMC scalaire. C'est la forme la plus efficace pour une rotation : elle fournit l'équation du mouvement en **éliminant toutes les forces dont la droite d'action coupe l'axe**. *Pendule simple* (M suspendu en O par un fil de longueur ℓ , angle θ avec la verticale descendante) : $L_{Oz} = m\ell^2\dot{\theta}$, le moment de la tension est nul et celui du poids vaut $-mg\ell \sin \theta$ (bras de levier $\ell \sin \theta$), d'où $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta$, soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$ **sans faire intervenir la tension**.

Théorème — conservation. Si $\sum_k \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_k) = \vec{0}$, alors $\vec{L}_O$ est un **vecteur constant** ; si seulement $\sum_k \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_k) = 0$, alors L_Δ est constant. On cherche donc un point (ou un axe) annulant **tous les moments** : **forces centrales** de centre O , pivot idéal, forces parallèles à Δ ou dont la droite d'action coupe Δ .

4 MOUVEMENT DANS UN CHAMP DE FORCE CENTRALE

Définition. Un point matériel est soumis à un **champ de force centrale de centre** O si, à tout instant, $\vec{F} = F \vec{u}_r$ avec $\vec{u}_r = \overrightarrow{OM}/r$: la force est portée par la droite (OM) . Elle est **attractive** si $F < 0$, **répulsive** si $F > 0$.

Théorème — planéité. Une force centrale de centre O a un moment nul en O (deux vecteurs colinéaires), donc le TMC donne $\vec{L}_O = \vec{L}_0$ constant. Si $\vec{L}_0 \neq \vec{0}$: comme $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) = 0$ à tout instant, M reste dans le **plan passant par O et orthogonal à $\vec{L}_0$** — **le mouvement est plan**, ce plan étant fixé par les conditions initiales. Si $\vec{L}_0 = \vec{0}$, la vitesse initiale est radiale et le mouvement est **rectiligne** sur la droite (OM_0) .

Théorème — loi des aires. On travaille en coordonnées polaires dans le plan du mouvement, (Oz) étant orienté par $\vec{L}_0$. La conservation de $L = L_{Oz} = mr^2\dot{\theta}$ s'écrit

$$C = r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m} = \text{cte} \quad (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}), \quad \text{et, comme } dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta, \quad \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cte}$$

C est la **constante des aires** et dA/dt la **vitesse aréolaire** : **le rayon vecteur balaie des aires égales en des durées égales** (deuxième loi de Kepler, valable pour toute force centrale). Conséquence qualitative : **le mobile va d'autant plus vite qu'il est près du centre**. Enfin C et $\dot{\theta}$ gardent le signe de C : **le sens de rotation ne change jamais** et r ne s'annule pas.

5 FORCE CENTRALE CONSERVATIVE : L'ÉNERGIE POTENTIELLE EFFECTIVE

Propriété. Une force centrale dont la norme ne dépend que de r , $\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$, est **conservative** : elle dérive de $E_p(r)$ avec $F(r) = -dE_p/dr$, et $E_m = E_c + E_p$ est constante.

Théorème — énergie potentielle effective. $E_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$; en éliminant $\dot{\theta}$ grâce à $r^2\dot{\theta} = C = L/m$:

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r), \quad E_{p,\text{eff}}(r) = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Le problème est ramené à un mouvement à une dimension sur $r > 0$: on applique la lecture graphique du chapitre d'énergétique. Le terme $L^2/(2mr^2)$, positif et décroissant, est le **terme centrifuge** ; il interdit au mobile d'atteindre le centre dès que $L \neq 0$.

Méthode — lire le mouvement radial. Les valeurs de r accessibles sont celles où la droite horizontale E_m est **au-dessus** de la courbe $E_{p,\text{eff}}$. Les racines de $E_m = E_{p,\text{eff}}(r)$ donnent $\dot{r} = 0$: ce sont le **péricentre** $r_{\min}$ et l'**apocentre** $r_{\max}$. Si r reste borné, le mouvement est un **état lié** ; s'il peut tendre vers $+\infty$, c'est un **état de diffusion**. Si E_m vaut le **minimum** de $E_{p,\text{eff}}$, alors $\dot{r} = 0$ en permanence : r est constant, la trajectoire est un **cercle**.

6 LE CHAMP NEWTONIEN

Définition. Un champ de force centrale est **newtonien** s'il varie en $1/r^2$:

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r, \quad E_p(r) = -\frac{K}{r} \quad (\text{origine à l'infini}),$$

attractif si $K > 0$, **répulsif** si $K < 0$. Gravitation : $K = GMm > 0$. Interaction coulombienne entre deux charges : $K = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$, donc $E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ — attractive pour des charges opposées, répulsive sinon.

Propriété — allure de $E_{p,\text{eff}}$, cas attractif. Avec $K > 0$ et $L \neq 0$, le terme centrifuge domine en 0^+ ($E_{p,\text{eff}} \rightarrow +\infty$) et le terme newtonien à l'infini ($E_{p,\text{eff}} \rightarrow 0^-$) : la courbe présente un **unique minimum**, en

$$r_0 = \frac{L^2}{mK}, \quad E_{p,\text{eff}}(r_0) = -\frac{mK^2}{2L^2} < 0.$$

On lit alors la nature du mouvement : $E_m = E_{p,\text{eff}}(r_0)$ donne un **cercle** de rayon r_0 ; $E_{p,\text{eff}}(r_0) < E_m < 0$ donne un **état lié**, r oscillant entre $r_{\min}$ et $r_{\max}$ — la trajectoire est alors une **ellipse** (résultat admis); $E_m \geq 0$ donne un **état de diffusion**. Dans le cas **répulsif**, $E_{p,\text{eff}}$ est strictement décroissante et positive : il n'existe **aucun état lié**.

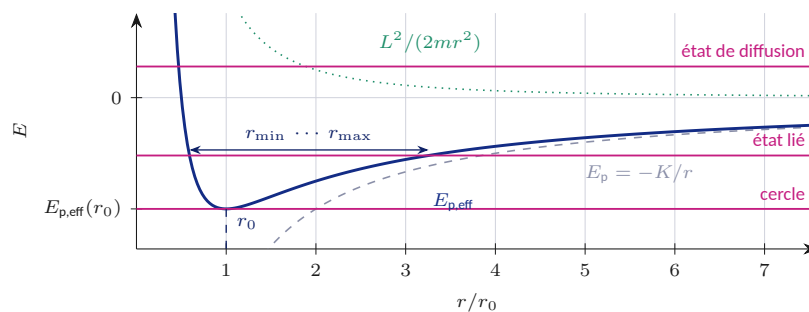


Figure 2 — Énergie potentielle effective newtonienne attractive : les trois types de mouvement radial.

Théorème — lois de Kepler. (1) Dans le référentiel héliocentrique, chaque planète décrit une **ellipse** dont le Soleil occupe un **foyer**. (2) Le segment Soleil-planète balaie des **aires égales pendant des durées égales**. (3) Le rapport T^2/a^3 de la période de révolution au cube du demi-grand axe est le **même pour toutes les planètes** : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$. Ces trois lois se **transposent aux satellites** d'une même planète, en remplaçant M_S par la masse de la planète. **Attention** : T^2/a^3 n'est universelle que pour des corps tournant *autour du même centre attracteur*; les constantes d'un satellite terrestre et d'une planète diffèrent d'un facteur $M_S/M_T \approx 3 \times 10^5$.

7 LE MOUVEMENT CIRCULAIRE : TOUT EST CALCULABLE

Théorème — uniformité. Si un point matériel soumis au seul champ newtonien attractif décrit un cercle de centre O , son mouvement est **uniforme**. *Démonstration (exigible).* Le théorème de la puissance cinétique donne $dE_c/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$; or $\vec{F}$ est radiale et, sur un cercle, $\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$ est orthoradiale, donc $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ et v est constante. (Variante : la projection de $m\vec{a} = \vec{F}$ sur $\vec{u}_\theta$ donne $mr\dot{\theta} = 0$.)

Théorème — vitesse, période, troisième loi. Sur ce cercle $\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r$; la projection de la deuxième loi sur $\vec{u}_r$ donne $-m\frac{v^2}{r} = -\frac{K}{r^2}$, d'où, avec $K = GMm$:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}}, \quad T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}, \quad \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

La masse du satellite n'intervient pas. Plus l'orbite est haute, plus le satellite est lent ($v \propto r^{-1/2}$) et plus sa période est longue ($T \propto r^{3/2}$).

Théorème — énergie d'une orbite. Sur le cercle $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} = -\frac{1}{2}E_p$, donc

$$\boxed{E_m = -\frac{GMm}{2r} = -E_c = \frac{E_p}{2}} \quad \text{et, pour une ellipse de demi-grand axe } a \text{ (admis),} \quad \boxed{E_m = -\frac{GMm}{2a}}$$

L'énergie mécanique ne dépend que du demi-grand axe, pas de la forme de l'ellipse; le cercle est le cas $a = r$.

Remarque. Passer d'une orbite circulaire r_1 à une orbite $r_2 > r_1$ coûte $\Delta E_m = \frac{1}{2}GM_T m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) > 0$: **monter coûte de l'énergie** bien que le satellite y soit plus *lent*.

8 SATELLITES TERRESTRES ET VITESSES COSMIQUES

Théorème — satellite géostationnaire. Un satellite **géostationnaire** reste à la verticale du même point de la Terre : son mouvement est circulaire uniforme, de **période sidérale** $T_0 = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} = 86\,164 \text{ s}$, dans le sens de rotation de la Terre, et son **plan orbital est le plan équatorial**. En effet le centre O de la Terre appartient nécessairement au plan de l'orbite ; or le point survolé décrit un cercle d'axe l'axe des pôles, et le seul plan contenant O et un tel cercle est le plan équatorial — une orbite inclinée ferait osciller le satellite en latitude. Numériquement

$$r = \left(\frac{GM_T T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 4,21 \times 10^4 \text{ km}, \quad h = r - R_T = 3,58 \times 10^4 \text{ km}, \quad v = 3,07 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Propriété — orbites et missions. **LEO** ($h \sim 400 \text{ km}$, $T \approx 90 \text{ min}$) : station spatiale, observation à haute résolution, couverture intermittente. **Polaire héliosynchrone** ($h \sim 800 \text{ km}$) : chaque point du globe survolé à la même heure solaire locale — météorologie. **MEO** ($h \sim 20\,000 \text{ km}$, $T \approx 12 \text{ h}$) : navigation (GPS, Galileo), qui exige de voir plusieurs satellites à la fois. **GEO** : télécommunications, antenne au sol fixe, mais pôles invisibles et retard de $0,24 \text{ s}$ à l'aller-retour.

Théorème — vitesses cosmiques. La **première vitesse cosmique** est celle d'une orbite circulaire rasante, $v_1 = \sqrt{GM_T/R_T} = 7,91 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. La **vitesse de libération** est la vitesse minimale de lancement permettant d'atteindre l'infini ; l'état est de diffusion si $E_m \geq 0$, soit $\frac{1}{2}mv^2 \geq \frac{GM_T m}{R_T}$:

$$v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = v_1 \sqrt{2} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Elle est **indépendante de la direction de lancement et de la masse** du projectile : c'est une condition purement énergétique.

9 CAPACITÉ NUMÉRIQUE ET DÉMONSTRATIONS EXIGIBLES

Méthode — tracer une trajectoire. On intègre le système du premier ordre sur (x, y, v_x, v_y) avec $\mu = GM$: $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$, $\dot{v}_x = -\mu x/(x^2 + y^2)^{3/2}$, $\dot{v}_y = -\mu y/(x^2 + y^2)^{3/2}$.

```
1 import numpy as np
2 mu, h, N = 3.982e14, 1.0, 40000 # G*M_T (SI), pas de temps, nombre de pas
3 X = np.zeros((N, 4)) ; X[0] = [7.0e6, 0.0, 0.0, 8.2e3]
4 def f(e):
5     x, y, vx, vy = e ; d = (x**2 + y**2)**1.5
6     return np.array([vx, vy, -mu*x/d, -mu*y/d])
7 for k in range(N-1): # Euler explicite
8     X[k+1] = X[k] + h*f(X[k])
```

Remarque. Deux contrôles indispensables : $C = xv_y - yv_x$ et $E_m/m = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) - \mu/\sqrt{x^2 + y^2}$ doivent rester constants. Avec Euler explicite ils dérivent et l'orbite « spirale » : réduire h , ou passer à un schéma semi-implicite.

► SAVOIR-FAIRE — Démonstrations exigibles et savoir-faire

- **TMC** : dériver $\vec{OM} \wedge m\vec{v}$, le terme $\vec{v} \wedge m\vec{v}$ est nul, puis deuxième loi de Newton. **Indépendance de $\mathcal{M}_\Delta$** du point de l'axe ; **bras de levier**.
- **Planéité** : force centrale $\Rightarrow \vec{L}_O$ constant, et $\vec{OM} \cdot \vec{L}_O = 0$ donne le plan. **Loi des aires** : $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ et $r^2\dot{\theta} = C$.
- **Construction de $E_{p,\text{eff}}$** : écrire E_m en polaires, éliminer $\dot{\theta}$ par $r^2\dot{\theta} = C$; en déduire états liés, états de diffusion, r_{min} , r_{max} , orbite circulaire.
- **Cas circulaire** : uniformité, puis v , T , troisième loi et $E_m = -GMm/(2r)$; **altitude du géostationnaire** et **vitesse de libération**.
- **Troisième loi de Kepler** pour « peser » un astre à partir de la période et du rayon d'orbite d'un de ses satellites ; coût énergétique d'un transfert par $E_m = -GMm/(2a)$.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$; $\mathcal{M}_\Delta = \pm F_\perp d$; $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$; en polaires $L_{Oz} = mr^2\dot{\theta}$.

- TMC : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_k \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_k)$ (O fixe, $\mathcal{R}$ galiléen) ; forme scalaire sur un axe fixe.
- Force centrale : $\vec{L}_O$ constant, mouvement plan, $C = r^2\dot{\theta} = L/m$, $dA/dt = C/2$.
- $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$ avec $E_{p,\text{eff}} = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$.
- Newtonien : $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{u}_r$, $E_p = -\frac{K}{r}$, gravitation $K = GMm$.
- Cercle : $v = \sqrt{GM/r}$, $T^2 = 4\pi^2 r^3/(GM)$, $E_m = -\frac{GMm}{2r}$; ellipse : $E_m = -\frac{GMm}{2a}$; libération : $v_{\text{lib}} = \sqrt{2GM/R}$.
- Données : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI}$; $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$, $GM_T = 3,98 \times 10^{14} \text{ SI}$; $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$; $1 \text{ ua} = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$; jour sidéral 86 164 s.

✖ PIÈGES

- Parler d'« un moment » sans préciser le point ou l'axe, ou changer de point en cours de raisonnement.
- Appliquer le TMC en un point *mobile* ou dans un référentiel non galiléen ; conclure d'un moment nul que la force est nulle ; se tromper de signe sur $\mathcal{M}_\Delta$ faute d'avoir orienté l'axe.
- Confondre E_p et $E_{p,\text{eff}}$, ou oublier le terme centrifuge $L^2/(2mr^2)$: c'est lui qui crée le puits et interdit la chute sur le centre.
- Chercher à démontrer le caractère elliptique de la trajectoire : **hors programme** — il est affirmé, non établi.
- Confondre demi-grand axe a et rayon r , ou altitude h et rayon d'orbite $r = R_T + h$.
- Appliquer $T^2/a^3 = \text{cte}$ à des astres tournant autour de centres attracteurs différents, ou mélanger les unités (T en jours et a en ua n'est licite qu'avec la constante correspondante).
- Oublier qu'un satellite géostationnaire est nécessairement *équatorial*, ou prendre 24 h au lieu de 86 164 s.
- Croire qu'un satellite plus haut va plus vite : v décroît en $r^{-1/2}$ alors que E_m croît. Faire dépendre v , T ou v_{lib} de la masse du satellite : elle se simplifie toujours.