

# Fiche de cours Machines thermiques

Machines cycliques dithermes, inégalité de Clausius, théorème de Carnot, moteurs, réfrigérateurs, pompes à chaleur, cogénération

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

## 1 QU'EST-CE QU'UNE MACHINE THERMIQUE ?

**Définition.** Une **machine thermique** est un dispositif dans lequel un **fluide** (l'*agent thermodynamique* : eau, air, fluide frigorigène) décrit une suite de transformations en échangeant du travail et des transferts thermiques avec le milieu extérieur. Elle est dite **cyclique** lorsque le fluide revient périodiquement dans le même état : sur un cycle, l'état initial et l'état final sont identiques.

**Définition.** Un **thermostat** (ou **source de chaleur**) est un système dont la température reste *uniforme et constante* quels que soient les transferts thermiques qu'il échange : atmosphère, fleuve, sol, local climatisé, foyer de combustion entretenu. Une machine est **monotherme** si elle n'échange de transfert thermique qu'avec un seul thermostat, **ditherme** si elle en échange avec exactement deux, notés  $T_c$  (*source chaude*) et  $T_f$  (*source froide*), avec  $T_c > T_f > 0$ .

**Notation.** Le système étudié est *le fluide*, et toutes les énergies sont comptées **positivement lorsqu'elles sont reçues par le fluide** :  $W$  est le travail reçu sur un cycle (travail des forces de pression et travail d'un arbre),  $Q_c$  et  $Q_f$  les transferts thermiques reçus respectivement de la source chaude et de la source froide. Les températures sont *toujours* en kelvins. Si la machine décrit  $f$  cycles par seconde, les puissances valent  $\mathcal{P} = fW$ ,  $\mathcal{P}_c = fQ_c$ ,  $\mathcal{P}_f = fQ_f$ .

### ✖ ATTENTION — La limite du programme

On n'étudie que des machines *cycliques* et *dithermes*. Les machines polythermes (plus de deux sources) ne sont pas au programme : un dispositif industriel réel se *modélise* par une machine ditherme, en identifiant les deux thermostats entre lesquels il fonctionne.

## 2 LES DEUX PRINCIPES APPLIQUÉS À UN CYCLE

**Théorème — premier principe sur un cycle.**  $U$  est une *fonction d'état* : sur un cycle,  $\Delta U = 0$ . Le premier principe  $\Delta U = W + Q$  donne donc

$$W + Q_c + Q_f = 0$$

**Théorème — deuxième principe sur un cycle.**  $S$  est une *fonction d'état* : sur un cycle,  $\Delta S = 0$ . Le deuxième principe  $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$  avec  $S_{\text{éch}} = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}$  donne  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{\text{créée}} = 0$ , et comme  $S_{\text{créée}} \geq 0$  :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0 \quad (\text{inégalité de Clausius})$$

avec **égalité si et seulement si le cycle est réversible**.

### ✖ ATTENTION — Les températures de l'inégalité de Clausius

$T_c$  et  $T_f$  sont les températures *des thermostats*, pas celles du fluide : l'entropie échangée se calcule toujours avec la température de la source qui fournit le transfert. Le fluide, lui, voit sa température varier tout au long du cycle.

**Méthode — la machine proposée est-elle possible ?** Trois tests, dans cet ordre : (i) le premier principe,  $W + Q_c + Q_f = 0$ ; (ii) l'inégalité de Clausius; (iii) conclusion — si Clausius est violée la machine est *impossible*, si l'égalité est atteinte elle est *réversible*, sinon elle est possible et *irréversible*, avec

$$S_{\text{créée}} = - \left( \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \right) > 0.$$

## 3 LE SENS DES ÉCHANGES

**Théorème — impossibilité du moteur monotherme.** Pour une machine cyclique monotherme en contact avec un thermostat  $T_0$ , l'inégalité de Clausius se réduit à  $Q/T_0 \leq 0$ , donc  $Q \leq 0$  et, par le premier principe,  $W = -Q \geq 0$  : **une machine cyclique monotherme ne peut que recevoir du travail**. Il est impossible de produire du travail en se contentant de refroidir l'océan ou l'atmosphère.

**Propriété — les signes sont imposés.** Soit une machine cyclique ditherme.

- Si elle est **motrice** ( $W < 0$  : elle fournit du travail), alors nécessairement  $Q_c > 0$  et  $Q_f < 0$  : **le moteur prélève de la chaleur à la source chaude et en cède à la source froide.**
- Si elle est **réceptrice** ( $W > 0$  : elle consomme du travail) et transfère effectivement de la chaleur du froid vers le chaud, alors  $Q_f > 0$  et  $Q_c < 0$ .

*Idée de la démonstration pour le moteur :* si l'on avait  $Q_c \leq 0$ , alors  $Q_f = -W - Q_c > 0$  et, puisque  $\frac{1}{T_c} < \frac{1}{T_f}$  et  $Q_c \leq 0$ ,  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \geq \frac{Q_c + Q_f}{T_f} = \frac{-W}{T_f} > 0$ , ce qui contredit Clausius. Donc  $Q_c > 0$ , et Clausius donne alors  $Q_f \leq -\frac{T_f}{T_c} Q_c < 0$ .

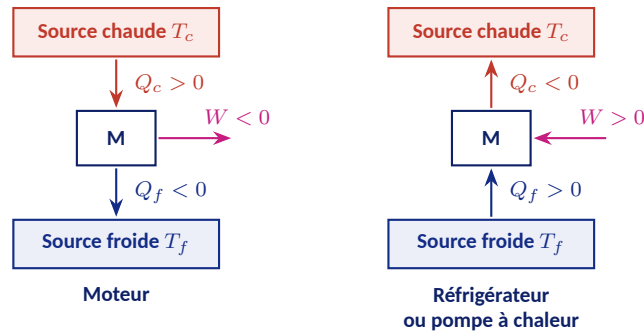


Figure 1 — Les deux sens de fonctionnement d'une machine ditherme : les flèches donnent le sens *réel* des transferts, les signes sont ceux des grandeurs reçues par le fluide. Réfrigérateur et pompe à chaleur sont la *même* machine : seule change l'énergie déclarée utile.

#### 4 LE MOTEUR DITHERME : RENDEMENT ET THÉORÈME DE CARNOT

**Définition.** Le **rendement** d'un moteur ditherme est le rapport de l'énergie utile (le travail fourni,  $|W| = -W$ ) à l'énergie coûteuse (la chaleur prélevée à la source chaude,  $Q_c > 0$ ) :

$$\eta = \frac{|W|}{Q_c} = \frac{-W}{Q_c} \quad 0 < \eta < 1.$$

**Théorème — théorème de Carnot.** Le rendement d'un moteur cyclique ditherme fonctionnant entre les thermostats  $T_c$  et  $T_f$  vérifie

$$\eta \leq \eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

avec **égalité si et seulement si le moteur est réversible**. Le rendement maximal ne dépend que des *températures des thermostats* : ni du fluide, ni de la forme du cycle, ni de la taille de la machine.

*Démonstration (exigible) :* le premier principe donne  $-W = Q_c + Q_f$ , donc

$$\eta = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}.$$

L'inégalité de Clausius  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$  s'écrit, puisque  $Q_c > 0$  et  $T_f > 0$ ,  $\frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$ . En reportant :  $\eta \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$ . L'égalité a lieu exactement quand  $S_{crée} = 0$ .

**Remarque.** Le théorème de Carnot est une conséquence du *deuxième* principe : c'est lui, et non le premier, qui interdit  $\eta = 1$ . On retient aussi la forme équivalente  $\eta = \eta_C - \frac{T_f S_{crée}}{Q_c}$  : **tout ce qui manque au rendement de Carnot est de l'entropie créée.**

##### ★ EXEMPLE — une centrale thermique

Vapeur à  $560^\circ\text{C}$  ( $T_c = 833\text{ K}$ ), condenseur refroidi par un fleuve à  $25^\circ\text{C}$  ( $T_f = 298\text{ K}$ ) :  $\eta_C = 1 - 298/833 = 0,64$ , pour un rendement réel voisin de 0,42, soit 65 % de la borne de Carnot. Pour 600 MW électriques il faut extraire  $600/0,42 = 1,43\text{ GW}$  au foyer et évacuer 0,83 GW au fleuve.

#### 5 RÉFRIGÉRATEUR ET POMPE À CHALEUR : LES EFFICACITÉS

**Définition.** Pour un récepteur ( $W > 0$ ,  $Q_f > 0$ ,  $Q_c < 0$ ), on définit deux grandeurs selon l'usage :

$$e_{\text{frigo}} = \frac{Q_f}{W} \quad (\text{réfrigérateur, climatiseur}), \quad e_{\text{PAC}} = \frac{|Q_c|}{W} \quad (\text{pompe à chaleur}).$$

L'utile est le froid produit dans le premier cas, la chaleur fournie dans le second. On parle d'**efficacité** (ou de *coefficient de performance*, COP), *jamais* de rendement.

**Théorème — théorème de Carnot pour les récepteurs.** En reprenant la démonstration avec  $W > 0$  :

$$e_{\text{frigo}} \leq \frac{T_f}{T_c - T_f} \quad \text{et} \quad e_{\text{PAC}} \leq \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

avec égalité si et seulement si la machine est réversible.

*Idée de la démonstration :*  $W = -Q_c - Q_f$  ; Clausius s'écrit  $-Q_c \geq \frac{T_c}{T_f} Q_f$ , d'où  $W \geq Q_f \frac{T_c - T_f}{T_f}$  et le premier résultat. Pour la pompe à chaleur, Clausius donne  $Q_f \leq -\frac{T_f}{T_c} Q_c$ , donc  $W \geq |Q_c| \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right)$ .

**Propriété — une identité à connaître.** Pour une même machine,  $|Q_c| = W + Q_f$ , donc

$$e_{\text{PAC}} = e_{\text{frigo}} + 1$$

Les deux bornes de Carnot vérifient bien  $\frac{T_c}{T_c - T_f} = \frac{T_f}{T_c - T_f} + 1$ .

✖ **ATTENTION — une efficacité supérieure à 1 n'est pas un rendement supérieur à 1**

$e_{\text{PAC}} = 4$  signifie qu'un joule de travail électrique permet de délivrer quatre joules de chaleur au logement : les trois autres ont été **pompés à l'extérieur**, ils ne sont pas créés. Le bilan énergétique  $|Q_c| = W + Q_f$  est strictement respecté. C'est au contraire un rendement  $\eta > 1$  pour un moteur qui serait absurde, car l'utile y est une *partie* du coûteux.

★ **EXEMPLE — trois ordres de grandeur**

Réfrigérateur ( $T_f = 278 \text{ K}$ ,  $T_c = 293 \text{ K}$ ) :  $e_{\text{max}} = 278/15 = 18,5$ , réel 3 à 5. Congélateur ( $T_f = 255 \text{ K}$ ,  $T_c = 295 \text{ K}$ ) :  $e_{\text{max}} = 255/40 = 6,4$ , réel 1,5 à 2,5. Pompe à chaleur air/eau ( $T_f = 280 \text{ K}$ ,  $T_c = 318 \text{ K}$ ) :  $e_{\text{max}} = 318/38 = 8,4$ , réel 3 à 4. **Les machines réelles n'atteignent que 15 à 40 % de la borne de Carnot** : l'écart est bien plus grand que pour les moteurs, car les écarts de température entre le fluide et les sources y sont relativement énormes.

## 6 LE CYCLE DE CARNOT ET SA LECTURE DANS LE DIAGRAMME DE CLAPEYRON

**Définition.** Le **cycle de Carnot** est le cycle réversible ditherme : il est constitué de **deux isothermes réversibles** (aux températures  $T_c$  et  $T_f$ , pendant lesquelles le fluide échange avec les thermostats) et de **deux adiabatiques réversibles**, donc isentropiques (pendant lesquelles il passe d'une température à l'autre sans échanger de chaleur).

**Remarque.** Cette structure est *imposée* : un transfert thermique réversible exige l'égalité des températures du fluide et du thermostat, donc une transformation isotherme ; et pour passer de  $T_f$  à  $T_c$  sans contact avec un troisième thermostat, il faut une adiabatique. C'est pourquoi **tous** les cycles réversibles dithermes sont des cycles de Carnot.

**Théorème — cycle de Carnot d'un gaz parfait.** Pour  $n$  moles de gaz parfait décrivant  $A \rightarrow B$  (isotherme  $T_c$ ),  $B \rightarrow C$  (isentropique),  $C \rightarrow D$  (isotherme  $T_f$ ),  $D \rightarrow A$  (isentropique), la loi de Laplace sous la forme  $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$  impose  $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$ . Avec  $\Delta U = 0$  sur une isotherme de gaz parfait,

$$Q_c = nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A} > 0, \quad Q_f = -nRT_f \ln \frac{V_B}{V_A} < 0, \quad \eta = \frac{-W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

On retrouve le rendement de Carnot, *indépendamment* de  $n$ , de  $\gamma$  et du rapport de compression.

**Propriété — lecture d'un cycle dans le diagramme de Clapeyron.** Le travail des forces de pression reçu par le fluide au cours d'un cycle quasi statique et mécaniquement réversible vaut  $W = - \oint P \, dV$ . Donc, dans le plan  $(V, P)$  :

- $|W|$  est l'**aire du cycle** ;
- cycle parcouru dans le sens **horaire**  $\Rightarrow \oint P \, dV > 0 \Rightarrow W < 0$  : la machine est **motrice** ;
- cycle parcouru dans le sens **antihoraire**  $\Rightarrow W > 0$  : la machine est **réceptrice**.

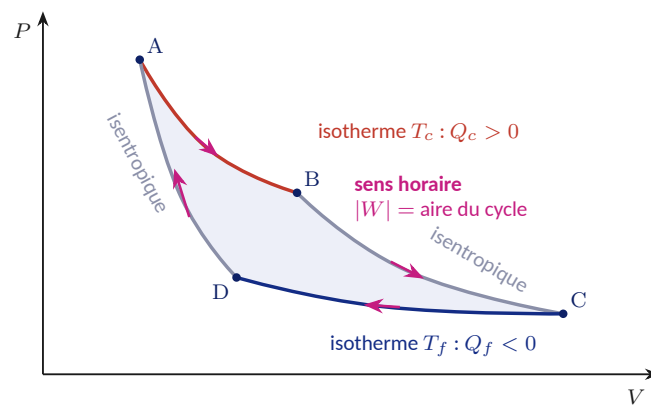


Figure 2 — Cycle de Carnot moteur dans le diagramme de Clapeyron (schéma de principe, échelles non linéaires). Les isothermes ( $PV = \text{cte}$ ) sont moins pentues que les isentropiques ( $PV^\gamma = \text{cte}$ ,  $\gamma > 1$ ). Parcouru dans l'autre sens, le même cycle décrit un réfrigérateur ou une pompe à chaleur.

### ✖ ATTENTION — pourquoi le cycle de Carnot n'est pas utilisé en pratique

Entre 600 K et 300 K avec  $\gamma = 1,40$  et un rapport de compression isotherme de 3, le cycle exige un rapport de volumes total  $V_C/V_A = 17$  : machine énorme, aire du cycle — donc puissance — dérisoire. Les machines réelles sacrifient du rendement pour gagner de la puissance. En revanche, **dans le domaine diphasé l'isotherme est aussi une isobare** : un cycle à changement d'état (centrale à vapeur, machine à compression de vapeur) réalise naturellement les deux isothermes de Carnot.

## 7 MODÉLISER UN DISPOSITIF CONCRET

**Méthode — analyser une machine réelle.** (i) identifier le *fluide* qui décrit le cycle; (ii) identifier les *deux thermostats* et leurs températures en kelvins; (iii) déterminer le sens (moteur ou récepteur) et donc les signes; (iv) nommer l'énergie *utile* et l'énergie *coûteuse*, écrire le rendement ou l'efficacité; (v) appliquer les deux principes sur un cycle; (vi) comparer à la borne de Carnot et commenter l'écart.

| Dispositif                           | Fluide             | Sources                         | Performance réelle                  |
|--------------------------------------|--------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| Centrale à flamme (cycle de Rankine) | eau                | foyer 560 °C / fleuve 20 °C     | $\eta = 0,35 \text{ à } 0,45$       |
| Centrale nucléaire (REP)             | eau                | vapeur 280 °C / fleuve ou air   | $\eta \approx 0,33$                 |
| Moteur à essence / Diesel            | air + carburant    | gaz brûlés / atmosphère         | $\eta \approx 0,30 \text{ / } 0,40$ |
| Réfrigérateur, climatiseur           | fluide frigorigène | local / air extérieur           | $e_{\text{frigo}} = 2 \text{ à } 5$ |
| Pompe à chaleur                      | fluide frigorigène | air ou sol / plancher chauffant | $e_{\text{PAC}} = 3 \text{ à } 4$   |

## 8 LA COGÉNÉRATION

**Définition.** La **cogénération** consiste à produire *simultanément*, à partir d'un même combustible, de l'électricité (ou du travail mécanique) et de la chaleur effectivement utilisée. Son **rendement global** est

$$\eta_{\text{glob}} = \frac{|W| + Q_{\text{utile}}}{Q_c}$$

où  $Q_{\text{utile}} = |Q_f|$  est la part du transfert thermique rejeté qui est valorisée (chauffage urbain, eau chaude sanitaire, procédé industriel).

**Propriété — le principe.** Dans une centrale classique, le transfert  $|Q_f|$ , inévitable d'après le deuxième principe, est **perdu** dans un fleuve ou dans l'air : 55 à 65 % du combustible. La cogénération ne supprime pas ce rejet — c'est impossible — elle le rend **utilisable** en élevant  $T_f$  jusqu'à une température exploitable (60 °C à 90 °C); le rendement global atteint alors 0,80 à 0,90.

### ✖ ATTENTION — le compromis de la cogénération

Élever  $T_f$  diminue  $\eta_C = 1 - T_f/T_c$ , donc le rendement électrique : on échange du travail contre de la chaleur utile. La cogénération n'est donc pas une violation du théorème de Carnot, c'est un arbitrage. Elle n'est intéressante que s'il existe un *besoin de chaleur simultané* au besoin d'électricité : une unité de cogénération dont la chaleur n'est pas consommée est moins performante qu'une centrale classique.

## ★ EXEMPLE — économie d'énergie primaire

Un module de cogénération au gaz consomme 250 kW (pouvoir calorifique) et délivre 90 kW électriques et 125 kW thermiques utiles :  $\eta_{\text{glob}} = (90 + 125)/250 = 0,86$ . Produire séparément les mêmes services exigerait  $90/0,45 = 200$  kW (centrale de rendement 0,45) et  $125/0,92 = 136$  kW (chaudière de rendement 0,92), soit 336 kW : la cogénération économise 26 % d'énergie primaire.

## 9 DÉMONSTRATIONS ET RÉSULTATS À SAVOIR REFAIRE

- **Inégalité de Clausius** à partir de  $\Delta U = 0$ ,  $\Delta S = 0$  et du deuxième principe ; **impossibilité du moteur monotherme**.
- **Sens imposé des échanges** pour un moteur : raisonnement par l'absurde à partir de Clausius.
- **Théorème de Carnot** pour le moteur, le réfrigérateur et la pompe à chaleur ;  $e_{\text{PAC}} = e_{\text{frigo}} + 1$ .
- **Cycle de Carnot d'un gaz parfait** : les quatre étapes,  $V_C/V_D = V_B/V_A$  par la loi de Laplace,  $Q_c, Q_f, \eta = 1 - T_f/T_c$ .
- $|W| = \text{aire du cycle}$  dans le diagramme de Clapeyron, et lien sens de parcours / nature de la machine ;  $\eta = \eta_C - T_f S_{\text{créée}}/Q_c$ .

## ➤ SAVOIR-FAIRE

- Donner le sens des échanges énergétiques pour un moteur ou un récepteur ditherme, et les justifier.
- Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme (fluide, deux thermostats, utile, coûteux).
- Définir un rendement ou une efficacité, le relier aux énergies échangées sur un cycle, justifier et utiliser le théorème de Carnot ; décider si une machine annoncée est possible, réversible ou impossible.
- Calculer l'entropie créée par cycle et l'attribuer à des causes physiques d'irréversibilité.
- Exploiter un cycle tracé dans le diagramme de Clapeyron : sens de parcours, aire, travail, transferts.
- Citer des ordres de grandeur des rendements et efficacités des machines réelles actuelles.
- Expliquer le principe de la cogénération et calculer une économie d'énergie primaire.

## ■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- Sur un cycle :  $\Delta U = 0$  donc  $W + Q_c + Q_f = 0$  ;  $\Delta S = 0$  donc  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{\text{créée}} = 0$ .
- Clausius :  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$ , égalité ssi réversible ;  $S_{\text{créée}} = -\left(\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}\right)$ .
- Moteur :  $\eta = \frac{|W|}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$  ; froid :  $e_{\text{frigo}} = \frac{Q_f}{W} \leq \frac{T_f}{T_c - T_f}$  ; chaud :  $e_{\text{PAC}} = \frac{|Q_c|}{W} \leq \frac{T_c}{T_c - T_f}$ .
- $e_{\text{PAC}} = e_{\text{frigo}} + 1$  ; cogénération :  $\eta_{\text{glob}} = \frac{|W| + Q_{\text{utile}}}{Q_c}$ .
- Clapeyron :  $W = -\oint P \, dV$ ,  $|W| = \text{aire}$  ; horaire  $\Rightarrow$  moteur, antihoraire  $\Rightarrow$  récepteur.
- Carnot d'un gaz parfait :  $Q_c = nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A}$ ,  $Q_f = -nRT_f \ln \frac{V_B}{V_A}$ ,  $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$ .
- Repères : centrale à flamme  $\eta \approx 0,40$  ( $\eta_C \approx 0,64$ ) ; essence 0,30 ; Diesel 0,40 ; réfrigérateur  $e \approx 3$  ; PAC  $e \approx 3,5$  ; cogénération  $\eta_{\text{glob}} \approx 0,85$  ;  $\mathcal{P} = f W$  ;  $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \text{ MJ}$ .

## ✗ PIÈGES

- Oublier que sur un cycle  $\Delta U = 0$  et  $\Delta S = 0$  : ce sont les deux équations de départ de tout exercice du chapitre.
- Se tromper de signe : un moteur reçoit  $Q_c > 0$  et cède  $Q_f < 0$  ; en compression, le travail reçu est positif.
- Écrire  $S_{\text{éch}} = Q_c/T_{\text{fluide}}$  : l'entropie échangée se calcule avec la température du thermostat ; utiliser des degrés Celsius dans  $1 - T_f/T_c$  (les températures sont en kelvins, sans exception).
- S'étonner qu'une efficacité dépasse 1, ou parler de « rendement » d'une pompe à chaleur ; confondre  $e_{\text{frigo}} = Q_f/W$  et  $e_{\text{PAC}} = |Q_c|/W$ , qui diffèrent exactement de 1.
- Appliquer le théorème de Carnot à une machine qui n'est pas ditherme, ou qui n'est pas cyclique ; croire qu'un moteur monotherme est possible.
- Confondre énergie par cycle (en joules) et puissance (en watts) : il manque le facteur  $f$ , nombre de cycles par seconde.
- Croire que la cogénération supprime le rejet thermique : elle le valorise, au prix d'un rendement électrique plus faible.
- Inverser le sens de parcours dans le diagramme de Clapeyron (horaire  $\Rightarrow$  moteur), ou annoncer un rendement sans vérifier  $\eta \leq \eta_C$ .