

Fiche de cours Lois de Newton

Quantité de mouvement, lois de Newton, forces usuelles, chute avec et sans frottement, pendule simple

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

1 MASSE ET QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Définition. La **masse** m d'un système est une grandeur scalaire positive, additive, qui mesure son inertie, c'est-à-dire sa résistance à toute variation de vitesse. Elle s'exprime en kilogrammes et, en mécanique classique, elle est **indépendante du référentiel** et du mouvement.

Propriété — conservation de la masse. Un système est dit **fermé** s'il n'échange pas de matière avec l'extérieur. La masse d'un système fermé est **constante au cours du temps** : si le système se scinde en plusieurs parties, ou si plusieurs parties se réunissent, la somme des masses est inchangée. C'est cette propriété qui autorise à écrire m devant la dérivée dans la deuxième loi.

Définition. La **quantité de mouvement** d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}(M)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est

$$\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} = m \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \quad (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

Pour un système S de N points matériels M_i de masses m_i , la quantité de mouvement est additive :

$$\vec{p}(S) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}(M_i).$$

Définition. Le **centre de masse** (ou centre d'inertie) G d'un système de points M_i est le point défini par

$$\left(\sum_i m_i \right) \vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OM}_i, \quad \text{soit} \quad \sum_i m_i \vec{GM}_i = \vec{0}.$$

La seconde écriture montre que G ne dépend pas du point O choisi.

Théorème — quantité de mouvement et centre de masse. Pour un système fermé de masse totale $m = \sum_i m_i$,

$$\vec{p}(S) = m \vec{v}(G)$$

Démonstration (exigible pour deux points). Soit O un point fixe de $\mathcal{R}$ et deux points M_1, M_2 de masses m_1, m_2 . Par définition de G , $(m_1 + m_2) \vec{OG} = m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2$. Les masses étant constantes (système fermé), on dérive cette égalité par rapport au temps dans $\mathcal{R}$:

$$(m_1 + m_2) \frac{d\vec{OG}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{OM}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{OM}_2}{dt}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (m_1 + m_2) \vec{v}(G) = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{p}(S).$$

Le cas de N points est identique. La constance des masses est l'hypothèse essentielle : sans elle, la dérivation ferait apparaître des termes $\dot{m}_i \vec{OM}_i$.

Remarque. L'étude du mouvement d'ensemble d'un système déformable (gymnaste, fusée de feu d'artifice qui explose, chaîne) se ramène donc à celle d'un point matériel G affecté de la masse totale.

2 LES TROIS LOIS DE NEWTON

Définition. Un référentiel $\mathcal{R}$ est **galiléen** si le principe d'inertie y est vérifié. Cette définition est expérimentale : aucun référentiel n'est galiléen « par nature », on ne peut que constater qu'il l'est à la précision et pour la durée de l'expérience considérée.

Théorème — première loi — principe d'inertie. Il existe des référentiels, dits galiléens, dans lesquels tout point matériel **isolé** (soumis à aucune force) ou **pseudo-isolé** (soumis à des forces de somme nulle) est en **mouvement rectiligne uniforme** — la vitesse $\vec{v}$ est un vecteur constant, éventuellement nul.

Propriété — relativité galiléenne. Si $\mathcal{R}$ est galiléen, un référentiel $\mathcal{R}'$ est galiléen **si et seulement si** il est en **translation rectiligne uniforme** par rapport à $\mathcal{R}$. Tous les référentiels galiléens sont alors équivalents : les lois de la mécanique y prennent la même forme.

Notation. Référentiels galiléens usuels, par qualité décroissante : **héliocentrique** (centre du Soleil, axes vers des étoiles lointaines), **géocentrique** (centre de la Terre, axes du précédent, galiléen sur quelques heures), **terrestre** (lié au sol, galiléen si l'on néglige la rotation de la Terre — ce qui suffit à presque toute expérience de laboratoire).

Théorème — deuxième loi — loi fondamentale de la dynamique. Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, pour un point matériel de masse m constante soumis aux forces $\vec{F}_k$:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_k \vec{F}_k} \quad \text{soit, puisque } m \text{ est constante} \quad \boxed{m \vec{a} = \sum_k \vec{F}_k}$$

Pour un système fermé de masse m et de centre de masse G , la même relation vaut avec $\vec{a}(G)$ et la somme des forces **extérieures** seulement : les forces intérieures se compensent deux à deux par la troisième loi.

Théorème — troisième loi — actions réciproques. Deux points matériels A et B en interaction exercent l'un sur l'autre des forces **opposées** et **portées par la droite** (AB) :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}, \quad \vec{F}_{A \rightarrow B} \parallel \overrightarrow{AB}.$$

✖ **ATTENTION — L'erreur la plus fréquente de tout le chapitre**

Les deux forces de la troisième loi *ne s'appliquent pas au même système* : l'une agit sur A , l'autre sur B . Elles ne peuvent donc **jamais** être additionnées dans un même bilan des forces, et elles ne « s'annulent » jamais. Le poids d'un livre posé sur une table et la réaction de la table sur le livre sont deux forces opposées, mais ce n'est *pas* la troisième loi : elles s'appliquent toutes deux au livre, et leur somme est nulle parce que le livre est en équilibre.

3 CATALOGUE DES FORCES USUELLES

Propriété — gravitation. Deux points matériels de masses m_A et m_B , distants de r , s'attirent :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\frac{G m_A m_B}{r^2} \vec{u}_{A \rightarrow B}, \quad G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2},$$

où $\vec{u}_{A \rightarrow B}$ est le vecteur unitaire de A vers B : le signe $-$ traduit le caractère *attractif*.

Propriété — poids et champ de pesanteur uniforme. Au voisinage de la surface de la Terre, la force de gravitation exercée par la Terre sur un point de masse m s'écrit $\vec{P} = m \vec{g}$, avec

$$g = \frac{G M_T}{R_T^2} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}, R_T = 6370 \text{ km}).$$

Le **modèle du champ de pesanteur uniforme** consiste à supposer $\vec{g}$ *indépendant du point* : il est légitime tant que l'altitude et l'extension horizontale du mouvement restent très petites devant R_T . Avec $\vec{u}_z$ vertical ascendant, $\vec{g} = -g \vec{u}_z$.

Propriété — réaction d'un support. Un support exerce sur un point en contact une force $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$, somme d'une composante **normale** $\vec{R}_N$ (perpendiculaire au support, dirigée du support vers le mobile) et d'une composante **tangentielle** $\vec{R}_T$, qui traduit le frottement. Un contact est dit **sans frottement** lorsque $\vec{R}_T = \vec{0}$: $\vec{R}$ est alors normale au support. R_N est une **inconnue du problème** : elle s'élimine ou se détermine à la fin.

Propriété — tension d'un fil. Un fil **inextensible, sans masse et parfaitement souple** tendu exerce sur le point auquel il est attaché une force $\vec{T}$ portée par le fil et dirigée **du point vers le fil**, de norme $T \geq 0$. C'est une **inconnue supplémentaire** : elle s'élimine par projection, ou se détermine avec l'équation restante. Un fil ne peut que *tirer* : si le calcul donne $T < 0$, c'est que le fil s'est détendu et que le modèle ne vaut plus.

Propriété — force de rappel d'un ressort. Un ressort de raideur $k > 0$ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$) et de longueur à vide ℓ_0 , dont une extrémité est fixée en A et l'autre au point M , exerce sur M la force

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_{A \rightarrow M}, \quad \ell = AM.$$

Elle est dirigée vers l'intérieur si le ressort est étiré ($\ell > \ell_0$), vers l'extérieur s'il est comprimé ($\ell < \ell_0$) : le ressort **rappelle toujours vers sa longueur naturelle**. Pour un ressort horizontal repéré par l'écart $x = \ell - \ell_0$ à sa longueur à vide, $\vec{F} = -k x \vec{u}_x$.

Propriété — frottement fluide. Un fluide exerce sur un solide en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ une force qui **s'oppose toujours au mouvement relatif**. Deux modèles :

$$\text{régime linéaire (faible vitesse) : } \vec{f} = -h \vec{v}, \quad \text{régime quadratique (grande vitesse) : } \vec{f} = -\beta v \vec{v},$$

avec $h > 0$ en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\beta > 0$ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$, et $v = \|\vec{v}\|$. Dans les deux cas $\vec{f}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et de sens opposé. Le modèle linéaire décrit les petits objets lents (loi de Stokes $h = 6\pi\eta a$ pour une sphère de rayon a dans un fluide de viscosité η) ; le modèle quadratique décrit les objets usuels dans l'air ($\beta = \frac{1}{2}\rho C_x S$, avec S la section frontale et C_x le coefficient de traînée, de l'ordre de 1).

Notation. Le programme note $-k v \vec{v}$ la force quadratique ; nous écrivons $-\beta v \vec{v}$ pour réserver la lettre k à la raideur d'un ressort.

Remarque. Pour compléter le catalogue : une charge q subit la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$, dont l'étude fait l'objet du **chapitre 11**. Pour un électron dans $10^3 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$, le rapport de la force électrique au poids vaut $\sim 10^{13}$: le poids d'une particule chargée est presque toujours négligeable.

4 LA MÉTHODE DE RÉOLUTION : CINQ ÉTAPES, TOUJOURS LES MÊMES

Méthode — mise en équation. (i) Définir le système étudié — un point matériel, ou le centre de masse d'un solide — et le dire explicitement. (ii) Choisir le référentiel et le supposer galiléen en le justifiant d'un mot. (iii) Faire le bilan des forces extérieures et le représenter sur un schéma, chaque vecteur partant du point. (iv) Choisir le système de coordonnées adapté au nombre de degrés de liberté et à la géométrie (cartésiennes pour une trajectoire plane sans contrainte, cylindriques dès qu'il y a une rotation ou une distance fixée), écrire la deuxième loi vectoriellement, puis la projeter sur les vecteurs de la base. (v) Exploiter : éliminer les inconnues de liaison (T , R_N), obtenir une équation différentielle par degré de liberté, l'intégrer avec les conditions initiales.

✗ ATTENTION — Trois réflexes

Le nombre d'équations scalaires obtenues vaut la dimension de l'espace, pas le nombre de degrés de liberté : les équations « en trop » donnent les inconnues de liaison. — On projette sur une base orthonormée et l'on ne change pas de base en cours de calcul. — Dans $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$, les termes $-r\dot{\theta}^2$ et $2\dot{r}\dot{\theta}$ sont des termes d'accélération, jamais des forces.

5 MOUVEMENT DANS UN CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME, SANS FROTTEMENT

Théorème — chute libre. Un point matériel de masse m soumis à son seul poids, dans un référentiel galiléen, vérifie $m\vec{a} = m\vec{g}$, soit

$$\vec{a} = \vec{g}$$

L'accélération est indépendante de la masse : tous les corps tombent de la même façon. Le mouvement est à vecteur accélération constant. Avec $\vec{u}_z$ vertical ascendant, une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant l'angle α avec l'horizontale $\vec{u}_x$ et une position initiale à l'origine :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

Propriété — trajectoire, flèche, portée. En éliminant t entre les deux équations horaires ($t = x/(v_0 \cos \alpha)$), licite si $\alpha \neq \pi/2$:

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x : \text{ la trajectoire est une parabole d'axe vertical.}$$

La **flèche** H (altitude maximale, atteinte lorsque $\dot{z} = 0$) et la **portée** D (abscisse du retour à $z = 0$) valent

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$D = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

La portée est maximale pour $\alpha = \pi/4$, et deux angles complémentaires α et $\pi/2 - \alpha$ donnent la même portée. Durée du vol : $t_v = 2v_0 \sin \alpha / g$.

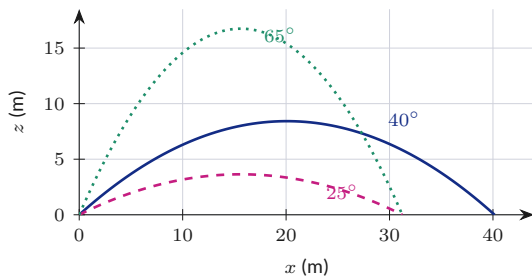


Figure 1 — Tirs à $v_0 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$: 25° et 65° ont la même portée.

★ EXEMPLE — tir à $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ sous 40°

$D = \frac{20^2 \sin 80^\circ}{9,81} = 40 \text{ m}$, $H = \frac{20^2 \sin^2 40^\circ}{2 \times 9,81} = 8,4 \text{ m}$ et $t_v = 2,6 \text{ s}$. Un lancer de poids réel porte à 20 m environ : le modèle sans frottement reste raisonnable pour un objet dense et lent, il devient très faux pour une balle de tennis.

6 MOUVEMENT AVEC FROTTEMENT FLUIDE : EXPLOITER SANS RÉSOUDRE

Théorème — chute verticale, frottement linéaire. Avec $\vec{u}_z$ descendant et le seul poids et frottement $-h\vec{v}$, la projection de $m\vec{a} = m\vec{g} - h\vec{v}$ donne

$$m \frac{dv}{dt} = mg - hv, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{h}.$$

Propriété — vitesse limite et temps caractéristique. La **vitesse limite** v_ℓ s'obtient *sans résoudre*, en cherchant le régime permanent $dv/dt = 0$:

$$\boxed{v_\ell = \frac{mg}{h} = g\tau} \quad (\text{linéaire}) \quad \boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{v_\ell}{g} \quad (\text{quadratique}).$$

τ est le temps caractéristique d'établissement du régime limite ; le régime permanent est atteint au bout de quelques τ . La distance parcourue pendant l'établissement est de l'ordre de $v_\ell\tau$.

Méthode — équation adimensionnée. On pose $V = \frac{v}{v_\ell}$ et $s = \frac{t}{\tau}$. L'équation devient, *sans aucun paramètre* :

$$\text{linéaire : } \frac{dV}{ds} = 1 - V ; \quad \text{quadratique : } \frac{dV}{ds} = 1 - V^2.$$

Une seule courbe décrit donc *toutes* les chutes du même modèle : c'est tout l'intérêt de l'adimensionnement. On lit sur cette courbe universelle, sans calcul, la durée de la phase transitoire et l'écart à la vitesse limite.

Propriété — lecture qualitative d'une équation différentielle. Sans la résoudre, on tire de $dv/dt = g - v/\tau$: la pente initiale $dv/dt(0) = g$ (le frottement est négligeable au démarrage, la chute commence comme une chute libre) ; le signe de dv/dt (positif si $v < v_\ell$, négatif si $v > v_\ell$), donc la **croissance monotone vers** v_ℓ et la **stabilité** de ce régime ; la concavité (la courbe est concave). L'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote $v = v_\ell$ a pour abscisse τ .

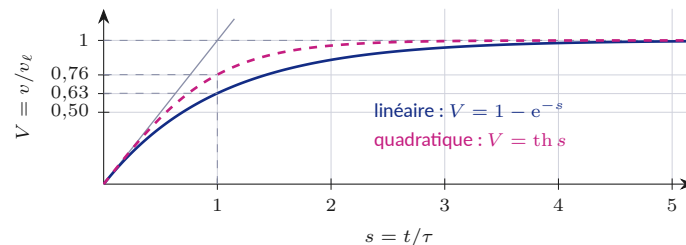


Figure 2 — Les deux chutes adimensionnées. Même tangente initiale de pente 1, même asymptote $V = 1$; le régime quadratique converge plus vite ($V(\tau) = 0,76$ contre $0,63$).

Méthode — capacité numérique : méthode d'Euler. L'équation $dv/dt = g - \beta v^2/m$ n'est pas linéaire : on la résout numériquement. Le schéma d'Euler explicite, avec un pas h_p petit devant τ , s'écrit $v_{k+1} = v_k + h_p g(1 - (v_k/v_\ell)^2)$:

```
1 import numpy as np
2 g, m, beta = 9.81, 80.0, 0.259 # parachutiste, chute libre bras en croix
3 vl = np.sqrt(m * g / beta)      # vitesse limite (m/s)
4 tau = vl / g                   # temps caractéristique (s)
5 hp = tau / 200                 # pas : petit devant tau
6 t = np.arange(0.0, 6 * tau, hp)
7 v = np.zeros(len(t))          # v[0] = 0 : depart au repos
8 z = np.zeros(len(t))          # distance de chute
9 for k in range(len(t) - 1):
10     v[k + 1] = v[k] + hp * g * (1 - (v[k] / vl) ** 2)
11     z[k + 1] = z[k] + hp * v[k]
```

Remarque. On exploite ensuite la simulation : lecture de la vitesse à une date donnée, de la date à laquelle v atteint 99 % de v_ℓ , de la distance de chute, comparaison à la chute libre $v = gt$. Contrôle indispensable : diviser le pas par deux et vérifier que le résultat ne change pas.

7 OSCILLATEUR MÉCANIQUE ET PENDULE SIMPLE

Théorème — masse-ressort horizontal. Un point M de masse m glisse sans frottement sur un axe horizontal (Ox), rappelé par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 fixé en O . On repère M par $x = \ell - \ell_0$. Les forces sont le poids $-mg\vec{u}_z$, la réaction normale $R_N\vec{u}_z$ et le rappel $-kx\vec{u}_x$. La deuxième loi projetée donne

$$\text{sur } \vec{u}_x : m\ddot{x} = -kx \implies \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{sur } \vec{u}_z : 0 = R_N - mg \implies R_N = mg.$$

C'est l'oscillateur harmonique du chapitre 5 : $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$, indépendante de l'amplitude (**isochronisme**).

Théorème — masse-ressort vertical. Pour un ressort vertical, le poids ne fait que **déplacer la position d'équilibre** sans changer la pulsation. En repérant M par son allongement $X = \ell - \ell_0$ mesuré vers le bas, $m\ddot{X} = mg - kX$; la position d'équilibre est $X_{\text{eq}} = mg/k$ et, en posant $u = X - X_{\text{eq}}$,

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{comme à l'horizontale.}$$

Méthode à retenir : repérer le mobile par son écart à la position d'équilibre fait disparaître le poids de l'équation.

Théorème — pendule simple. Un point M de masse m est suspendu en O par un fil inextensible sans masse de longueur ℓ ; on repère sa position par l'angle θ du fil avec la verticale descendante. Le mouvement étant circulaire de rayon ℓ , on travaille en coordonnées polaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ d'origine O , avec $r = \ell$ constant, donc $\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$. Les forces sont le poids $m\vec{g}$, de composantes $mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$, et la tension $\vec{T} = -T\vec{u}_r$. La deuxième loi se projette en

$$\text{sur } \vec{u}_\theta : \quad m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \implies \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0} \quad \text{sur } \vec{u}_r : \quad -m\ell\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T.$$

La projection sur $\vec{u}_\theta$ **élimine la tension** et donne l'équation du mouvement; celle sur $\vec{u}_r$ donne ensuite $T = m(g \cos \theta + \ell\dot{\theta}^2)$. L'équation du mouvement est **non linéaire** : elle ne se résout pas avec les fonctions usuelles.

Théorème — approximation des petites oscillations. Si $|\theta| \ll 1$ rad, $\sin \theta = \theta + O(\theta^3) \approx \theta$ et l'équation devient celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}} \quad \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

La période ne dépend ni de la masse, ni de l'amplitude : c'est l'isochronisme des petites oscillations. *Validité* : l'erreur relative sur $\sin \theta$ vaut $\theta^2/6$, soit 0,5 % pour $\theta_0 = 10^\circ$ et 2 % pour $\theta_0 = 20^\circ$. Au-delà, la période *augmente* avec l'amplitude (non-isochronisme), ce que seule une résolution numérique met en évidence.

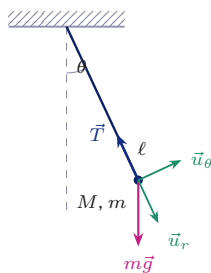


Figure 3 — Pendule simple

★ **EXEMPLE — mesurer g avec un pendule**

Un fil de longueur $\ell = 0,80$ m lâché à 8° donne $T_0 = 2\pi\sqrt{0,80/9,81} = 1,79$ s. Inversement, chronométrer 20 périodes (pour diviser par 20 l'incertitude sur le repérage des dates) et utiliser $g = 4\pi^2\ell/T_0^2$ fournit g à mieux que 1 % : c'est l'une des mesures les plus précises réalisables avec un fil et un chronomètre.

✖ **ATTENTION — Les deux fautes du pendule**

Écrire $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ sans avoir énoncé l'hypothèse $|\theta| \ll 1$. — Utiliser $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ pour une amplitude de 60° : la période réelle y est déjà 7 % plus grande.

8 MOUVEMENT AVEC LIAISON

Méthode — point astreint à rester sur une courbe ou une surface. La liaison réduit le nombre de degrés de liberté et introduit une **force de liaison inconnue** (réaction $\vec{R}_N$, tension $\vec{T}$). On choisit les coordonnées qui rendent la liaison triviale : $r = \ell$ pour un pendule, $z = 0$ pour un mouvement dans un plan horizontal, un axe le long de la ligne de plus grande pente pour un plan incliné. On projette alors sur la direction *tangente* au mouvement pour obtenir l'équation du mouvement débarrassée de la force de liaison, puis sur la direction *normale* pour calculer celle-ci.

★ **EXEMPLE — plan incliné sans frottement**

Un point de masse m glisse sans frottement sur un plan incliné d'angle α . Avec $\vec{u}_x$ le long de la ligne de plus grande pente descendante et $\vec{u}_y$ normale sortante : $m\ddot{x} = mg \sin \alpha$ et $0 = R_N - mg \cos \alpha$. Donc $\vec{a}$ est constante, $a = g \sin \alpha$, indépendante de la masse, et $R_N = mg \cos \alpha$. Pour $\alpha = 20^\circ$, $a = 3,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$: après 2,0 m de descente, $v = \sqrt{2aL} = 3,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

★ **EXEMPLE — mobile en rotation : la perle sur une tige**

Une perle enfilée sur une tige horizontale tournant à ω constant autour d'un axe vertical, sans frottement, est décrite en coordonnées cylindriques avec $\theta = \omega t$ et $z = 0$. La réaction de la tige est orthogonale à celle-ci, donc portée par $\vec{u}_\theta$ et

$\vec{u}_z$. La projection sur $\vec{u}_r$ donne $m(\ddot{r} - r\omega^2) = 0$, soit $\ddot{r} = \omega^2 r$: la perle s'éloigne exponentiellement, $r(t) = r_0 \cosh(\omega t)$ si $\dot{r}(0) = 0$. La projection sur $\vec{u}_\theta$ donne ensuite $R_\theta = 2m\omega\dot{r}$.

9 DÉMONSTRATIONS À SAVOIR REFAIRE

- $\vec{p} = m\vec{v}_G$ pour deux points : dériver la définition de G , en invoquant la constance des masses.
- **Équations horaires et trajectoire de la chute libre** ; en déduire flèche, portée, angle de portée maximale.
- **Équation du mouvement d'une chute avec frottement** (linéaire et quadratique), **vitesse limite** sans résolution, **équation adimensionnée**.
- **Équation du pendule simple** : coordonnées polaires, projection sur $\vec{u}_\theta$ (qui élimine T), puis sur $\vec{u}_r$ (qui donne T).
- **Linéarisation** $\sin \theta \approx \theta$ et période des petites oscillations ; **estimation du domaine de validité**.
- **Masse-ressort vertical** : la position d'équilibre se déplace de mg/k , la pulsation ne change pas.
- **Plan incliné** : $a = g \sin \alpha$ et $R_N = mg \cos \alpha$; $g = GM_T/R_T^2$ à partir de la loi de gravitation.

10 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Définir un système, un référentiel, le supposer galiléen en le justifiant.
- Faire un bilan des forces *complet* et le représenter sur un schéma orienté ; distinguer forces extérieures et intérieures.
- Reconnaître, dans un couple de forces, si la troisième loi est en jeu ou s'il s'agit d'un équilibre.
- Calculer $\vec{p}$ et la position de G ; exploiter $\vec{p} = m\vec{v}_G$ et la conservation de $\vec{p}$ pour un système pseudo-isolé.
- Projeter la deuxième loi dans la base adaptée, éliminer les forces de liaison, obtenir l'équation du mouvement.
- Traiter complètement un tir dans le champ de pesanteur uniforme : trajectoire, flèche, portée, durée.
- Déterminer une vitesse limite et un temps caractéristique *sans résoudre* ; adimensionner une équation ; exploiter une courbe ou une simulation.
- Écrire une boucle d'Euler pour une équation du mouvement avec frottement et discuter du pas.
- Établir l'équation du pendule simple, la linéariser, donner la période et discuter la validité.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- $\vec{p} = m\vec{v}$; $\vec{p}(S) = m\vec{v}_G$; $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$; $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$.
- Forces : $\vec{P} = m\vec{g}$; $\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{Gm_A m_B}{r^2} \vec{u}_{A \rightarrow B}$; $\vec{F}_{\text{ressort}} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}$; $\vec{f} = -h\vec{v}$ ou $-\beta v \vec{v}$.
- Chute libre : $\vec{a} = \vec{g}$; $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$; $D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$; $t_v = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$.
- Frottement : $\tau = \frac{m}{h}$, $v_\ell = g\tau = \frac{mg}{h}$ (linéaire) ; $v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}$, $\tau = \frac{v_\ell}{g}$ (quadratique).
- Oscillateurs : ressort $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; pendule $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$, $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$, $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.
- Cylindriques : $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$; $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$.
- Repères : $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$; $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6\,370 \text{ km}$; pendule de 1 m : $T_0 = 2,0 \text{ s}$; parachutiste : $v_\ell \approx 55 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; goutte de pluie : $v_\ell \approx 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

✗ PIÈGES

- Oublier de préciser le système, le référentiel, et de supposer ce dernier galiléen.
- Additionner dans un même bilan les deux forces de la troisième loi : elles agissent sur deux systèmes différents.
- Inventer une « force centrifuge » dans un référentiel galiléen : $-mr\dot{\theta}^2$ est un terme d'accélération, pas une force.
- Oublier la réaction du support, ou la supposer verticale sur un plan incliné (elle est *normale au support*).
- Traiter la tension d'un fil comme une donnée : c'est une inconnue, qu'il faut éliminer ou calculer.
- Écrire un frottement fluide sans vérifier son signe (il s'oppose *toujours* à la vitesse), mélanger les deux modèles, ou utiliser $v_\ell = mg/h$ dans le cas quadratique.
- Utiliser $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ hors du domaine des petites oscillations, ou omettre d'énoncer l'approximation.
- Projeter sur des axes non orthogonaux, ou changer de base en cours de calcul.
- Confondre masse (en kg, intrinsèque) et poids (en N, dépendant de g) ; parler de « poids » en apesanteur.
- En simulation, prendre un pas comparable à τ : le résultat est faux, voire divergent.