

# Fiche de cours Filtrage linéaire

Analyse spectrale, fonction de transfert, diagrammes de Bode, filtres passifs

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

## 1 SIGNAUX PÉRIODIQUES : VALEUR MOYENNE, VALEUR EFFICACE, SPECTRE

**Définition.** Un signal  $x$  est **périodique de période**  $T$  si  $x(t + T) = x(t)$  pour tout  $t$ . On note  $f = 1/T$  sa fréquence et  $\omega = 2\pi f$  sa pulsation. Sa **valeur moyenne** et sa **valeur efficace** sont

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt, \quad X_{\text{eff}} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$$

La valeur efficace est la valeur de la tension *continue* qui dissiperait la même puissance moyenne dans une résistance :  $\mathcal{P} = \langle u^2 \rangle / R = U_{\text{eff}}^2 / R$ . Elle est toujours positive, et nulle seulement si  $x$  est identiquement nul.

**Théorème — valeur efficace d'une sinusoïde.** Pour  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ , la linéarisation  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$  donne  $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} X_m^2$  (la moyenne du terme en  $2\omega t$  est nulle sur une période), d'où

$$X_{\text{eff}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

Ce facteur  $\sqrt{2}$  ne vaut que pour une sinusoïde : pour un créneau symétrique d'amplitude  $E$ ,  $x^2 = E^2$  à chaque instant, donc  $X_{\text{eff}} = E$ .

**Théorème — décomposition en série de Fourier — admise, et toujours fournie.** Tout signal périodique de pulsation  $\omega$  physiquement réalisable se décompose en une somme de fonctions sinusoïdales dont les pulsations sont les **multiples entiers** de  $\omega$  :

$$x(t) = \underbrace{a_0}_{\langle x \rangle} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n), \quad A_n \geq 0.$$

Le terme  $n = 1$  est le **fondamental**, les termes  $n \geq 2$  les **harmoniques de rang**  $n$ . *Aucun calcul de coefficient n'est exigible* : la décomposition est donnée dans l'énoncé.

**Définition.** Le **spectre en amplitude** est le diagramme en bâtons des  $A_n$  en fonction de la fréquence  $nf$  ; le **spectre en phase** celui des  $\varphi_n$ . Un signal périodique a un spectre **discret** : il ne contient que les fréquences  $f, 2f, 3f, \dots$

**Théorème — formule de Parseval, admise.** Le carré de la valeur efficace est la somme des carrés des valeurs efficaces de la composante continue et de tous les harmoniques :

$$X_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n^2}{2}$$

Ce sont les carrés qui s'ajoutent, jamais les amplitudes. C'est la traduction du fait que la puissance moyenne se répartit entre les harmoniques sans terme croisé, les produits  $\cos(n\omega t + \varphi_n) \cos(m\omega t + \varphi_m)$  étant de moyenne nulle pour  $n \neq m$ .

| Signal (amplitude $E$ , pulsation $\omega$ ) | Décomposition (fournie)                                                       | Harmoniques présents | $X_{\text{eff}}$     |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|
| créneau                                      | $\frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)\omega t)}{2p+1}$       | impairs, en $1/n$    | $E$                  |
| triangle                                     | $\frac{8E}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)\omega t)}{(2p+1)^2}$ | impairs, en $1/n^2$  | $\frac{E}{\sqrt{3}}$ |
| dent de scie                                 | $\frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\omega t)}{n}$               | tous, en $1/n$       | $\frac{E}{\sqrt{3}}$ |

**Notation.** Les décompositions ci-dessus correspondent au triangle valant  $+E$  en  $t = 0$  et  $-E$  en  $t = T/2$ , et à la dent de scie  $x(t) = E \left(1 - \frac{2t}{T}\right)$  sur  $]0; T[$ . Un décalage de l'origine des dates ne change que les phases, jamais les amplitudes.

**Remarque.** Plus un signal présente de *discontinuités* ou d'angles, plus son spectre est riche : le créneau décroît en  $1/n$ , le triangle — continu — en  $1/n^2$ . Un signal « lisse » est un signal pauvre en harmoniques élevés.

## 2 FONCTION DE TRANSFERT HARMONIQUE

**Définition.** Soit un quadripôle **linéaire**, en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ , d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$ . Sa **fonction de transfert harmonique** est le rapport des amplitudes complexes

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \quad G = |\underline{H}| = \frac{S_m}{E_m}, \quad \varphi = \arg \underline{H} = \varphi_s - \varphi_e.$$

$G$  est le **gain** (rapport des amplitudes, donc aussi des valeurs efficaces) et  $\varphi$  le **déphasage de la sortie par rapport à l'entrée**. Tous deux dépendent de  $\omega$ , jamais de l'amplitude d'entrée : c'est la linéarité.

**Définition.** Le **gain en décibels** est

$$G_{dB} = 20 \log G = 20 \log |\underline{H}|$$

(log désigne le logarithme *décimal*). Ainsi  $G = 1 \Leftrightarrow G_{dB} = 0$ ;  $G = \sqrt{2} \Leftrightarrow +3 \text{ dB}$ ;  $G = 1/\sqrt{2} \Leftrightarrow -3 \text{ dB}$ ;  $G = 10 \Leftrightarrow +20 \text{ dB}$ ;  $G = 1/2 \Leftrightarrow -6 \text{ dB}$ . Un gain négatif en dB signifie une *atténuation*, ce qui est la règle pour un filtre passif.

**Définition.** Une **décade** est un intervalle de fréquences dans le rapport 10, une **octave** un intervalle dans le rapport 2. Une pente de  $-20 \text{ dB}$  par décade équivaut à  $-6 \text{ dB}$  par octave (car  $20 \log 2 = 6,02$ ).

**Propriété.** La **bande passante à  $-3 \text{ dB}$**  d'un filtre est l'ensemble des pulsations pour lesquelles  $G \geq G_{\max}/\sqrt{2}$ , c'est-à-dire  $G_{dB} \geq G_{dB,\max} - 3$ . La puissance transmise y est au moins la moitié de la puissance maximale : on parle aussi de **pulsations de demi-puissance**. Les bornes sont les **pulsations de coupure**.

## 3 DIAGRAMME DE BODE

**Définition.** Le **diagramme de Bode** d'un filtre est la donnée de deux courbes, tracées avec l'**échelle logarithmique** en abscisse ( $\log \omega$  ou  $\log f$ ) :

- le **diagramme d'amplitude** :  $G_{dB}$  en fonction de  $\log \omega$ ;
- le **diagramme de phase** :  $\varphi$  en fonction de  $\log \omega$ .

L'intérêt des deux échelles logarithmiques est double : on couvre plusieurs décades sur une même figure, et **les comportements en loi de puissance deviennent des droites**. Si  $|\underline{H}| \propto \omega^\alpha$  alors  $G_{dB} = 20\alpha \log \omega + \text{cte}$  : c'est une droite de pente  $20\alpha \text{ dB}$  par décade.

**Méthode — lire ou tracer les asymptotes.** (i) chercher l'équivalent de  $\underline{H}$  quand  $\omega \rightarrow 0$  puis quand  $\omega \rightarrow +\infty$ ; (ii) chaque équivalent en  $K(j\omega)^\alpha$  donne une asymptote de pente  $20\alpha \text{ dB/décade}$  et une phase constante  $\alpha \times 90^\circ$  (à  $\arg K$  près); (iii) les asymptotes se coupent en  $\omega = \omega_c$ ; (iv) placer l'écart réel à la cassure :  **$-3 \text{ dB}$  pour un ordre 1**.

✗ **ATTENTION — Le diagramme asymptotique n'est pas la courbe**

Les asymptotes ne sont exactes qu'à *distance* de la cassure. En  $\omega = \omega_c$  l'écart vaut  $3 \text{ dB}$  pour un ordre 1, et il peut atteindre  $20 \log Q$  pour un ordre 2 résonant. À une décade de la cassure, l'écart est déjà inférieur à  $0,05 \text{ dB}$ .

## 4 LES FILTRES DU PREMIER ORDRE

**Propriété — passe-bas d'ordre 1.** Le circuit RC de la figure 1, en *sortie ouverte*, est un pont diviseur de tension en complexes :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}, \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

avec ici  $H_0 = 1$ . En posant  $x = \omega/\omega_c$  :

$$G = \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}, \quad G_{dB} = 20 \log H_0 - 10 \log(1+x^2), \quad \varphi = -\arctan x.$$

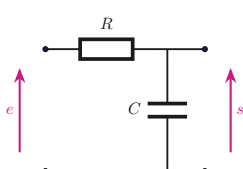


Figure 1 — Passe-bas RC

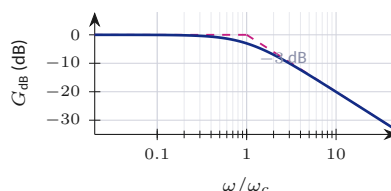


Figure 2 — Amplitude, pente  $-20 \text{ dB/déc}$

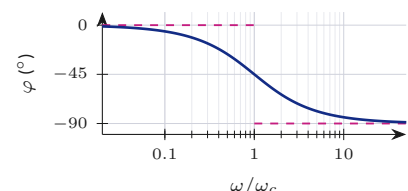


Figure 3 — Phase :  $0, -45^\circ, -90^\circ$

**Propriété — passe-haut d'ordre 1.** Le circuit CR de la figure 4 donne, par le même pont diviseur,

$$\underline{H} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{H} = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}, \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$G = \frac{H_0 x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad G_{dB} = 20 \log H_0 + 20 \log x - 10 \log(1+x^2), \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}.$$

L'asymptote basse fréquence a pour pente +20 dB/décade et la phase y vaut +90° ; l'asymptote haute fréquence est horizontale à 20 log H<sub>0</sub>, phase nulle. En  $\omega = \omega_c$  : -3 dB et  $\varphi = +45^\circ$ .

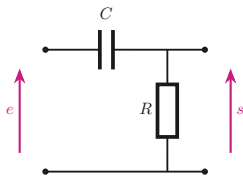


Figure 4 — Passe-haut CR

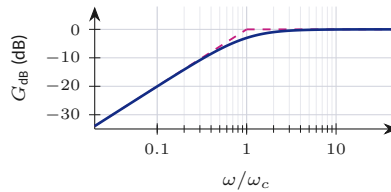


Figure 5 — Amplitude, pente +20 dB/déc

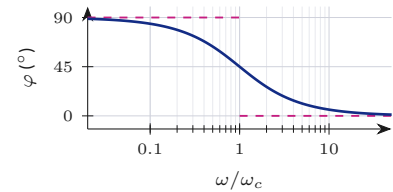


Figure 6 — Phase : +90°, +45°, 0

## 5 COMPORTEMENTS MOYENNEUR, INTÉGRATEUR, DÉRIVATEUR

**Théorème — intégrateur.** Pour un passe-bas d'ordre 1 et  $\omega \gg \omega_c$ ,  $\underline{H} \simeq \frac{H_0 \omega_c}{j\omega}$ , donc  $\underline{s} = \frac{H_0 \omega_c}{j\omega} \underline{e}$ . Comme la division par  $j\omega$  est l'intégration,

$$s(t) \simeq H_0 \omega_c \int e(t) dt \quad \text{si toutes les composantes de } e \text{ vérifient } \omega \gg \omega_c.$$

La condition porte sur toutes les fréquences présentes, donc sur le fondamental : un créneau de fréquence  $f \gg f_c$  est intégré, et ressort en triangle.

**Théorème — dérivateur.** Pour un passe-haut d'ordre 1 et  $\omega \ll \omega_c$ ,  $\underline{H} \simeq \frac{H_0 j\omega}{\omega_c}$ , donc

$$s(t) \simeq \frac{H_0}{\omega_c} \frac{de}{dt} \quad \text{si toutes les composantes de } e \text{ vérifient } \omega \ll \omega_c.$$

Un dérivateur amplifie les hautes fréquences : il est **très sensible au bruit**, contrairement à l'intégrateur qui le lisse.

**Théorème — moyennneur.** Un passe-bas dont la fréquence de coupure vérifie  $f_{\text{fond}} \gg f_c$  ne laisse passer, d'un signal périodique, que sa **composante continue** :  $s \simeq H_0 \langle e \rangle$ . Le même filtre est donc moyennneur pour la composante continue et intégrateur pour la partie variable.

### ✗ ATTENTION — Un filtre ne s'applique pas à un signal non sinusoïdal

$\underline{H}$  est définie en régime sinusoïdal forcé. Face à un signal périodique quelconque, on ne calcule jamais «  $\underline{H} \times e$  » : on décompose, on traite chaque harmonique séparément, puis on additionne.

## 6 RÉPONSE À UN SIGNAL PÉRIODIQUE : LA LINÉARITÉ

**Méthode — filtrer un signal périodique.** Soit  $e(t) = a_0 + \sum_n A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$  (décomposition fournie).

1. Calculer  $\underline{H}(jn\omega)$  pour chaque rang  $n$  utile, c'est-à-dire  $G_n = |\underline{H}(jn\omega)|$  et  $\psi_n = \arg \underline{H}(jn\omega)$ . Pour  $n = 0$ ,  $G_0 = |\underline{H}(0)|$ .
2. Écrire la sortie harmonique par harmonique :

$$s(t) = \underline{H}(0) a_0 + \sum_{n \geq 1} G_n A_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \psi_n).$$

3. Conclure :  $s$  est périodique de même période que  $e$  ; seules les amplitudes et les phases relatives des harmoniques ont changé.

**Théorème — un filtre linéaire ne crée aucune fréquence.** Le spectre de  $s$  est inclus dans celui de  $e$  : un filtre linéaire ne peut qu'atténuer (ou amplifier) et déphaser des composantes déjà présentes. **L'apparition dans le spectre de sortie d'une fréquence absente de l'entrée prouve que le système n'est pas linéaire** — c'est le test expérimental de la non-linéarité (distorsion d'un amplificateur saturé, diode, frottement solide).

**Propriété — valeur efficace de la sortie.** Par Parseval appliquée à  $s$  :

$$S_{\text{eff}}^2 = (|\underline{H}(0)| a_0)^2 + \sum_{n \geq 1} \frac{G_n^2 A_n^2}{2}.$$

Un filtre *réduit* en général la valeur efficace : c'est ainsi que l'on chiffre l'efficacité d'un moyenneur ou d'un anti-parasite.

## 7 LES FILTRES DU SECOND ORDRE (FONCTIONS DE TRANSFERT DONNÉES)

**Notation.** On pose  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , où  $\omega_0$  est la pulsation propre et  $Q$  le facteur de qualité, avec les notations du chapitre 5.

| Filtre      | Forme canonique                                                  | Asymptotes de $G_{\text{dB}}$             | Points remarquables                                                                            |
|-------------|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| passe-bas   | $\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$             | $20 \log H_0$ ; puis $-40 \text{ dB/déc}$ | en $x = 1$ : $G = QH_0$ ,<br>$\varphi = -90^\circ$ ; résonance<br>ssi $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| passe-bande | $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ | $+20$ puis $-20 \text{ dB/déc}$           | maximum $H_0$ en<br>$x = 1$ ( $\varphi = 0$ ) ;<br>$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$         |
| passe-haut  | $\underline{H} = \frac{-H_0 x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$        | $+40 \text{ dB/déc}$ ; puis $20 \log H_0$ | en $x = 1$ : $G = QH_0$ ,<br>$\varphi = +90^\circ$                                             |

**Propriété — réalisations RLC série.** Avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  (chapitre 5), la tension prélevée aux bornes de  $C$  donne un **passe-bas** ( $H_0 = 1$ ), aux bornes de  $R$  un **passe-bande** ( $H_0 = 1$ ), aux bornes de  $L$  un **passe-haut** ( $H_0 = 1$ ). La somme des trois fonctions de transfert vaut 1 : c'est la loi des mailles.

**Propriété — bande passante du passe-bande d'ordre 2.** Les pulsations de coupure vérifient  $Q|x - 1/x| = 1$ , d'où *exactement*  $\Delta\omega = \omega_0/Q$  et  $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$  : plus  $Q$  est grand, plus le filtre est **sélectif**. La bande passante relative vaut  $\Delta f/f_0 = 1/Q$ .

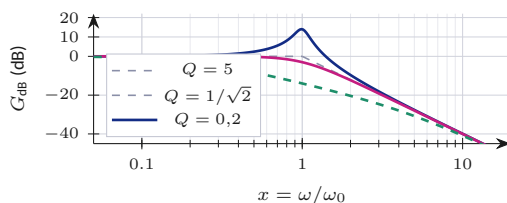


Figure 7 — Passe-bas d'ordre 2 ( $H_0 = 1$ )

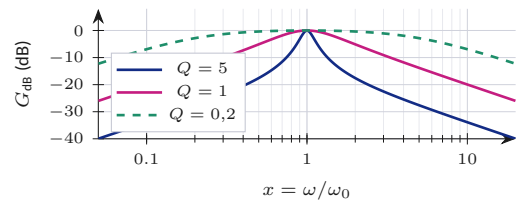


Figure 8 — Passe-bande d'ordre 2 ( $H_0 = 1$ ) : les asymptotes, de pentes  $\pm 20 \text{ dB/déc}$ , dépendent de  $Q$

## 8 MISE EN CASCADE ET IMPÉDANCES

**Propriété — cascade idéale.** Si l'on peut négliger le courant absorbé par le second étage, les fonctions de transfert se **multiplient** et les gains en décibels s'**additionnent** :

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2, \quad G_{\text{dB}} = G_{1,\text{dB}} + G_{2,\text{dB}}, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Deux passe-bas d'ordre 1 identiques mis en cascade idéale donnent un ordre 2 de pente  $-40 \text{ dB/décade}$ .

### ✖ ATTENTION — Le second étage charge le premier

$\underline{H} \neq \underline{H}_1 \underline{H}_2$  en général :  $\underline{H}_1$  a été calculée *en sortie ouverte*, or le second étage y dérive un courant. La multiplication n'est légitime que si

$$|\underline{Z}_{s,1}| \ll |\underline{Z}_{e,2}|$$

— **faible impédance de sortie du premier étage, forte impédance d'entrée du second.** Concrètement, deux cellules RC identiques mises bout à bout ne donnent pas  $1/(1+jx)^2$  mais  $1/(1-x^2+3jx)$ , soit  $Q = 1/3$  : la coupure est moins franche et le gain plus faible que prévu. On s'en approche en prenant  $R_2 \gg R_1$  et  $C_2 \ll C_1$  (typiquement d'un facteur 10 à 100).

## 9 FILTRAGE PAR UN DISPOSITIF MÉCANIQUE

**Propriété — la même physique.** Par l'analogie électromécanique (chapitre 5), tout oscillateur mécanique amorti est un filtre du second ordre. Soit une masse  $m$  reliée par un ressort de raideur  $k$  et un amortisseur de coefficient  $\lambda$  à un bâti dont la position  $u(t)$  est imposée; on note  $x$  la position absolue de la masse et  $z = x - u$  son déplacement *relatif* au bâti. L'équation du mouvement, fournie, s'écrit  $m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = -m\ddot{u}$ , d'où en RSF, avec  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ,  $Q = \sqrt{km}/\lambda$  et  $x = \omega/\omega_0$  :

$$\frac{z}{u} = \frac{x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} : \text{c'est un } \textbf{passe-haut d'ordre 2}; \quad \frac{x}{u} = 1 + \frac{z}{u} = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} : \text{un } \textbf{passe-bas}.$$

- **Sismomètre** : on travaille à  $\omega \gg \omega_0$  (masse lourde, ressort mou), où  $z/u \rightarrow -1$ , soit  $z \simeq -u$  : la masse reste immobile dans le référentiel terrestre et le boîtier bouge autour d'elle. On mesure ainsi le *déplacement* du sol, quelle que soit la fréquence, pourvu qu'elle dépasse  $f_0$ .
- **Accéléromètre** : on travaille au contraire à  $\omega \ll \omega_0$  (ressort raide), où  $z/u \rightarrow x^2$ , c'est-à-dire  $z \simeq -\ddot{u}/\omega_0^2$  : le déplacement relatif est proportionnel à l'*accélération* du bâti, avec une bande passante d'autant plus large que  $\omega_0$  est grande — d'où la miniaturisation des accéléromètres.
- **Suspension d'un véhicule** : c'est le déplacement absolu  $x$  de la caisse qui importe;  $x/u$  est un passe-bas, de pente seulement  $-20$  dB/décade à cause de l'amortisseur. On vérifie que  $|x/u| = 1$  pour  $x = \sqrt{2}$  et que **l'isolation n'existe que pour  $\omega > \omega_0\sqrt{2}$**  : on choisit donc  $\omega_0$  faible (ressorts souples), et  $Q$  voisin de  $1/\sqrt{2}$  pour éviter une résonance sans trop dégrader le filtrage.

## 10 CAPACITÉ NUMÉRIQUE : FILTRER UN SIGNAL DONT LE SPECTRE EST FOURNI

**Méthode — principe.** On code la *décomposition fournie* (tableau des rangs  $n$ , des amplitudes  $A_n$  et des phases  $\varphi_n$ ), on multiplie chaque amplitude par  $|H(jn\omega)|$  et on ajoute  $\arg H(jn\omega)$  à la phase, puis on resomme. Aucune transformée de Fourier n'est nécessaire.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 f0, fc = 500.0, 200.0           # fondamentale et fréquence de coupure (Hz)
5 n = np.arange(1, 40, 2)        # rangs impairs : spectre fourni d'un creneau
6 A = 4.0 / (np.pi * n)         # amplitudes fournies (creneau d'amplitude 1)
7 H = 1.0 / (1.0 + 1j * n * f0 / fc) # passe-bas d'ordre 1, évalue en n*f0
8
9 t = np.linspace(0.0, 3.0 / f0, 2000)
10 e = np.zeros_like(t)
11 s = np.zeros_like(t)
12 for k in range(len(n)):
13     e += A[k] * np.sin(2 * np.pi * n[k] * f0 * t)
14     s += abs(H[k]) * A[k] * np.sin(2 * np.pi * n[k] * f0 * t + np.angle(H[k]))
15
16 plt.plot(t, e, t, s)           # le creneau ressort arrondi, presque triangulaire
17 plt.figure()
18 plt.stem(n * f0, abs(H) * A)   # spectre de sortie : memes raies, atténuées
```

**Remarque.** Pour tracer un diagramme de Bode, on échantillonne la pulsation en échelle logarithmique et l'on trace en semilogx :  $w = \text{np.logspace}(1, 6, 500)$ ,  $H = 1/(1 + 1j*w/wc)$ , puis  $\text{plt.semilogx}(w, 20*\text{np.log10}(\text{abs}(H)))$  pour l'amplitude et  $\text{plt.semilogx}(w, \text{np.angle}(H, \text{deg}=True))$  pour la phase. Une échelle linéaire en fréquence écraserait tout le diagramme.

## 11 DÉMONSTRATIONS À SAVOIR REFAIRE

- **Valeur efficace d'une sinusoïde** : linéarisation de  $\cos^2$ , moyenne nulle du terme en  $2\omega t$ ,  $X_{\text{eff}} = X_m/\sqrt{2}$ .
- **Fonction de transfert d'un RC ou d'un CR** par le pont diviseur de tension en complexes, en sortie ouverte; mise sous forme canonique et identification de  $\omega_c$ .
- **Tracé complet du diagramme de Bode d'un ordre 1** : équivalents aux deux limites, pentes, intersection des asymptotes en  $\omega_c$ , écart de 3 dB, allure de la phase.
- **Comportements intégrateur et dérivateur** : équivalent de  $H$  et interprétation de  $1/(j\omega)$  et de  $j\omega$ .
- **Bande passante d'un passe-bande d'ordre 2** : résolution de  $Q|x - 1/x| = 1$ ,  $\Delta\omega = \omega_0/Q$ .
- **Réponse à un signal périodique** : décomposition fournie, traitement harmonique par harmonique, resommation.
- **Deux cellules RC en cascade** : loi des nœuds au point intermédiaire,  $H = 1/(1 - x^2 + 3jx)$ , et conclusion sur l'effet de charge.

## ► SAVOIR-FAIRE

- Calculer valeur moyenne et valeur efficace ; exploiter une décomposition fournie et un spectre ; appliquer Parseval.
- Établir la fonction de transfert d'un filtre passif par les impédances et les ponts diviseurs, et la mettre sous forme canonique ( $H_0$ ,  $\omega_c$  ou  $\omega_0$  et  $Q$ ).
- Tracer le diagramme de Bode d'un ordre 1 (asymptotes puis courbe réelle) ; lire sur un diagramme fourni la nature, l'ordre,  $\omega_c$ ,  $H_0$  et  $Q$ .
- Prévoir la sortie pour une excitation sinusoïdale, pour une somme finie de sinusoïdes, pour un signal périodique de spectre donné.
- Justifier un comportement moyennneur, intégrateur ou dérivateur et écrire la condition quantitative correspondante.
- Choisir un filtre à partir d'un cahier des charges (nature, ordre,  $f_c$ , atténuation demandée à une fréquence donnée).
- Discuter une mise en cascade en termes d'impédances d'entrée et de sortie.
- Reconnaître une non-linéarité à l'apparition de nouvelles fréquences ; interpréter le filtrage d'un dispositif mécanique.
- Écrire un programme Python qui applique un filtre à un signal dont le spectre est fourni et qui trace un diagramme de Bode.

## ■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- $\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_T x \, dt$  ;  $X_{\text{eff}} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$  ; sinus :  $X_{\text{eff}} = X_m / \sqrt{2}$  ; créneau :  $X_{\text{eff}} = E$ .
- Parseval :  $X_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \sum_n A_n^2 / 2$ .  $\underline{H} = \underline{s}/\underline{e}$ ,  $G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$ ,  $\varphi = \arg \underline{H}$ .
- Ordre 1 : passe-bas  $\frac{H_0}{1+jx}$ , passe-haut  $\frac{H_0 jx}{1+jx}$  avec  $x = \omega/\omega_c$  ; pentes  $\mp 20$  dB/déc ;  $-3$  dB et  $\mp 45^\circ$  en  $\omega_c$  ; RC ou CR :  $\omega_c = \frac{1}{RC}$ ,  $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$  ; RL série :  $\omega_c = \frac{R}{L}$  dans les deux montages (sortie sur  $R$  : passe-bas ; sortie sur  $L$  : passe-haut).
- Ordre 2 : passe-bas  $\frac{H_0}{1-x^2+jx/Q}$ , passe-bande  $\frac{H_0}{1+jQ(x-1/x)}$  ; pentes  $\pm 40$  et  $\pm 20$  dB/déc ;  $\Delta\omega = \omega_0/Q$ ,  $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$ .
- Intégrateur : passe-bas avec  $\omega \gg \omega_c$  ; dérivateur : passe-haut avec  $\omega \ll \omega_c$  ; moyennneur : passe-bas avec  $f_{\text{fond}} \gg f_c$ .
- Cascade :  $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$  si  $|\underline{Z}_{s,1}| \ll |\underline{Z}_{e,2}|$  ; sinon, tout recalculer.
- Valeurs :  $20 \log 2 = 6,0$  ;  $20 \log 3 = 9,5$  ;  $20 \log \sqrt{2} = 3,0$  ;  $20 \log 5 = 14,0$  ;  $\log \pi = 0,497$ .  $R = 1 \text{ k}\Omega$  et  $C = 100 \text{ nF} \Rightarrow f_c = 1,6 \text{ kHz}$ . Audio : 20 Hz à 20 kHz ; secteur 50 Hz.

## ✖ PIÈGES

- Tracer  $|\underline{H}|$  au lieu de  $20 \log |\underline{H}|$ , ou utiliser une échelle linéaire en fréquence : le diagramme de Bode exige les deux échelles logarithmiques et le logarithme décimal.
- Écrire  $G_{\text{dB}} = 10 \log |\underline{H}|$  (le 10 ne vaut que pour un rapport de puissances) ou confondre  $\log$  et  $\ln$ .
- Confondre l'ordre du filtre et le nombre de composants : l'ordre est le degré du dénominateur de  $\underline{H}$ .
- Croire que les asymptotes suffisent : il manque 3 dB à la cassure d'un ordre 1, et jusqu'à  $20 \log Q$  pour un ordre 2 résonant.
- Appliquer  $\underline{H}$  à un signal non sinusoïdal sans le décomposer, ou appliquer  $\underline{H}(j\omega)$  — valeur au fondamental — à tous les harmoniques.
- Additionner des gains au lieu de les multiplier (ou l'inverse en décibels) ; additionner des valeurs efficaces au lieu de leurs carrés.
- Mettre deux filtres en cascade et multiplier les fonctions de transfert sans vérifier les impédances : le second étage charge le premier.
- Croire qu'un filtre peut créer une fréquence absente de l'entrée : c'est au contraire la signature d'une non-linéarité.
- Confondre valeur efficace et amplitude : le facteur  $\sqrt{2}$  est propre à la sinusoïde.
- Oublier que la condition d'intégration ou de dérivation porte sur toutes les composantes du signal, donc en pratique sur le fondamental et sur les harmoniques utiles.
- Oublier la composante continue :  $\underline{H}(0)$  se calcule à part, et vaut 0 pour tout passe-haut.
- Négliger l'impédance d'entrée de l'oscilloscope ( $1 \text{ M}\Omega$  en parallèle avec quelques dizaines de picofarads) devant une résistance de  $1 \text{ M}\Omega$  : le montage mesuré n'est plus celui que l'on a calculé.