

Fiche de cours Énergétique du point

Travail, puissance, théorèmes énergétiques, énergie potentielle, profil d'énergie potentielle, équilibres et petites oscillations

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

1 PUISSANCE ET TRAVAIL D'UNE FORCE

Définition. La **puissance** d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point M de vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$ est $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (en watts) ; le **travail élémentaire** de $\vec{F}$ pendant dt , au cours duquel M subit le déplacement élémentaire $d\vec{OM} = \vec{v} dt$, est

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \mathcal{P} dt \quad (\text{J}), \quad \text{et} \quad W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P} dt.$$

Les deux grandeurs dépendent du référentiel, puisque $\vec{v}$ en dépend.

Notation. On écrit δW et non dW : le travail élémentaire n'est pas, en général, la variation élémentaire d'une fonction de la position. C'est précisément ce qui distinguera les forces conservatives des autres.

Propriété — moteur ou résistant. Une force est **motrice** sur un trajet si $W > 0$, **résistante** si $W < 0$. Instantanément, le signe de $\mathcal{P} = F v \cos \alpha$ est celui de $\cos \alpha$, où $\alpha = (\vec{F}, \vec{v})$: une force faisant un angle aigu avec la vitesse est motrice.

Propriété — forces qui ne travaillent jamais. Toute force **constamment orthogonale à la vitesse** a une puissance nulle, donc un travail nul sur tout trajet : **réaction normale** d'un support fixe sur lequel le point glisse, **tension d'un fil inextensible** d'un pendule, force magnétique $q \vec{v} \wedge \vec{B}$ (chapitre 11). En revanche la composante *tangentielle* d'une réaction (frottement) travaille, et toujours négativement.

Méthode — trois travaux à calculer de tête. Poids, de A à B : $W(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$ avec $\vec{u}_z$ ascendant — *seule la dénivellation compte*. Frottement de norme constante f opposé au mouvement, sur un trajet de longueur s : $W = -f s$ — *la longueur du chemin compte*. Force constante : $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$.

2 LES DEUX THÉORÈMES CINÉTIQUES

Définition. L'**énergie cinétique** d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$ est $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \geq 0$, en joules.

Théorème — puissance cinétique et énergie cinétique. Dans un référentiel galiléen, pour un point matériel de masse m constante soumis aux forces $\vec{F}_k$:

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum_k \mathcal{P}(\vec{F}_k)} \quad \text{et, entre deux dates,} \quad \boxed{\Delta E_c = \sum_k W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_k)}$$

Démonstration (exigible). $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}$ donc $\frac{dE_c}{dt} = m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} \cdot \vec{v} = \left(\sum_k \vec{F}_k \right) \cdot \vec{v}$ par la deuxième loi de Newton. La seconde forme s'obtient en intégrant entre t_A et t_B .

Méthode — lequel choisir ? Ces théorèmes ne contiennent aucune information nouvelle : ils sont la projection de la deuxième loi sur la vitesse, ne fournissent qu'une équation scalaire et perdent toute information sur la direction du mouvement. Le théorème de l'énergie cinétique relie deux états sans décrire l'évolution : « quelle vitesse en tel point ? », « quelle distance d'arrêt ? ». Le théorème de la *puissance* cinétique fournit une *équation différentielle* : on l'emploie pour mettre en équation un système à un degré de liberté, en particulier quand les forces de liaison sont inconnues — il les élimine automatiquement puisqu'elles ne travaillent pas.

3 FORCES CONSERVATIVES ET ÉNERGIE POTENTIELLE

Définition. Une force $\vec{F}$ définie en tout point et ne dépendant que de la position est **conservative** s'il existe une fonction E_p de la position, son **énergie potentielle**, telle que $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -dE_p$. Son travail vaut alors $W_{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B)$: il **ne dépend pas du chemin suivi**, et il est nul sur tout trajet fermé.

Propriété — relation force-gradient. La relation $\delta W = -dE_p$ s'écrit $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$, soit $F_x = -\partial E_p / \partial x$ en cartésiennes.

Pour un mouvement à **une dimension** repéré par x : $\boxed{F_x = -\frac{dE_p}{dx}}$. E_p **n'est définie qu'à une constante additive près** : seules ses variations ont un sens. On fixe la constante par une référence, et on l'annonce.

Théorème — les trois énergies potentielles du programme. Dans chaque cas, on écrit δW et l'on reconnaît une différentielle exacte :

$$\underbrace{\delta W = -mg \, dz}_{\text{poids, } \vec{u}_z \text{ asc.}} \Rightarrow E_p = mgz ; \quad \underbrace{\delta W = -k(\ell - \ell_0) \, d\ell}_{\text{ressort } (k, \ell_0)} \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 ; \quad \underbrace{\delta W = -\frac{GMm}{r^2} \, dr}_{\text{gravitation}} \Rightarrow E_p = -\frac{GMm}{r},$$

la dernière avec la référence $E_p(\infty) = 0$, les deux premières à une constante près.

Remarque. L'interaction coulombienne a la même structure : $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ et $E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ (nulle à l'infini), avec le signe du produit $q_1 q_2$. Son expression sera toujours fournie.

✖ **ATTENTION — Deux familles de forces qui ne sont pas conservatives**

Une **force de frottement** n'est pas conservative : son travail $-f \, s$ dépend de la longueur du chemin et reste *négligé* sur tout trajet, y compris fermé. Une force dépendant de la vitesse (frottement fluide $-h\vec{v}$) ne peut même pas l'être, une force conservative ne dépendant que de la position. Tension de fil et réaction ne sont pas conservatives non plus, mais, lorsqu'elles ne travaillent pas, elles disparaissent du bilan : c'est tout aussi commode.

4 ÉNERGIE MÉCANIQUE

Définition. L'**énergie mécanique** est $E_m = E_c + E_p$, où E_p est la somme des énergies potentielles de toutes les forces conservatives subies.

Théorème — théorème de l'énergie mécanique. Dans un référentiel galiléen, en séparant les forces conservatives (d'énergie potentielle totale E_p) des autres :

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{non cons}}} \quad \boxed{\Delta E_m = W_{\text{non cons}}}$$

Démonstration (exigible). $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{cons}} + \mathcal{P}_{\text{non cons}}$ et, par définition d'une force conservative, $\mathcal{P}_{\text{cons}} = -\frac{dE_p}{dt}$; on reporte et l'on regroupe.

Théorème — mouvement conservatif et intégrale première. Si toutes les forces qui travaillent sont conservatives, $E_m = \text{cte}$: c'est une **intégrale première du mouvement**, relation entre position et vitesse ne contenant plus de dérivée seconde. À une dimension, $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = E_m$, la constante étant fixée par les conditions initiales, d'où la vitesse en tout point *sans résoudre l'équation du mouvement* :

$$\boxed{|\dot{x}| = \sqrt{\frac{2}{m}(E_m - E_p(x))}}$$

Remarque. Dériver l'intégrale première par rapport au temps puis simplifier par $\dot{x}$ redonne $m\ddot{x} = -dE_p/dx$: c'est souvent la mise en équation la plus rapide.

✖ **ATTENTION — Le piège du double comptage**

Une force conservative figure soit par son travail dans le théorème de l'énergie cinétique, soit par son énergie potentielle dans E_m — **jamais les deux**. Écrire $\Delta E_m = W(\vec{P}) + W(\vec{f})$ après avoir mis mgz dans E_p compte le poids deux fois.

5 LECTURE D'UN PROFIL D'ÉNERGIE POTENTIELLE

Méthode — le profil d'énergie potentielle. Pour un mouvement conservatif à une dimension, on trace $E_p(x)$ et l'on y porte le niveau horizontal E_m . Tout se lit alors sur ce graphe, **sans aucun calcul** :

- **Zones accessibles** : $E_c = E_m - E_p(x) \geq 0$, donc le mouvement n'est possible que là où la courbe est sous le niveau E_m . Les points où $E_p(x) = E_m$ sont les **points de rebroussement** : la vitesse s'y annule et le point fait demi-tour (sauf en un maximum de E_p , atteint au bout d'un temps infini).
- **Vitesse** : $|\dot{x}|$ croît avec l'écart vertical $E_m - E_p$; elle est maximale au fond d'un puits.
- **Force** : $F_x = -dE_p/dx$ est l'*opposé de la pente* : la force pousse vers les énergies potentielles décroissantes et son intensité croît avec la raideur de la pente.

Définition. Un **puits de potentiel** est un minimum local de E_p , une **barrière de potentiel** un maximum local. Le mouvement est un **état lié** si la trajectoire est **bornée** (le point reste piégé entre deux points de rebroussement : le mouvement est périodique), un **état de diffusion** si elle est **non bornée**.

Propriété — franchir une barrière. Pour passer d'un côté à l'autre d'une barrière de sommet x_b , il faut $E_m \geq E_p(x_b)$: depuis un point x_0 , l'énergie cinétique minimale à fournir est $E_p(x_b) - E_p(x_0)$, la **hauteur de la barrière** vue de x_0 . Si E_p tend vers une limite finie, la condition pour s'échapper est $E_m \geq E_p(\infty)$; avec la convention usuelle $E_p(\infty) = 0$ en gravitation,

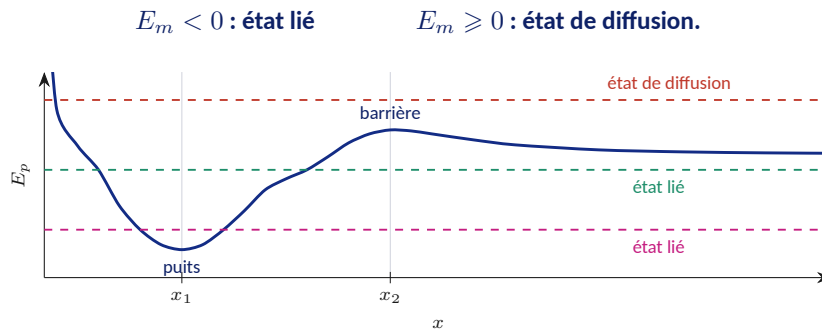


Figure 1 — Profil d'énergie potentielle : x_1 est un équilibre stable, x_2 un équilibre instable. Au niveau le plus bas le point oscille dans le puits entre deux points de rebroussement ; au niveau le plus haut il franchit la barrière et s'échappe vers $x \rightarrow +\infty$.

6 ÉQUILIBRES, STABILITÉ ET PETITS MOUVEMENTS

Théorème — positions d'équilibre et stabilité. Pour un mouvement conservatif à une dimension, $m\ddot{x} = -dE_p/dx$: les **positions d'équilibre** x_e sont les points où $E'_p(x_e) = 0$, c'est-à-dire les **extrema** de E_p . Comme la force pousse vers les E_p décroissantes,

$$E''_p(x_e) > 0 \text{ (minimum)} \implies \text{équilibre stable}$$

$$E''_p(x_e) < 0 \text{ (maximum)} \implies \text{instable}$$

Si $E''_p(x_e) = 0$, il faut pousser le développement plus loin. Sur le profil : le fond d'un puits est stable, le sommet d'une barrière est instable.

Théorème — approximation harmonique. Soit x_e un équilibre stable et $X = x - x_e$. Comme $E'_p(x_e) = 0$, le développement de Taylor à l'ordre 2 s'écrit $E_p(x) = E_p(x_e) + \frac{1}{2}E''_p(x_e)X^2 + O(X^3)$, d'où $F_x \simeq -E''_p(x_e)X$: **au voisinage d'un équilibre stable, toute force conservative se comporte comme un ressort** de raideur équivalente $k_{eq} = E''_p(x_e) > 0$. On retrouve l'oscillateur harmonique du chapitre 5 :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{E''_p(x_e)}{m}} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{E''_p(x_e)}}$$

période **indépendante de l'amplitude** (isochronisme). Le résultat est universel : il ne dépend du système que par $E''_p(x_e)$.

Méthode — en trois lignes. (i) écrire E_p ; (ii) résoudre $E'_p = 0$, puis calculer E''_p aux solutions pour trier stables et instables ; (iii) en un équilibre stable, $\omega_0 = \sqrt{E''_p(x_e)/m}$.

Remarque. Trois pulsations propres en une ligne. Masse-ressort horizontal : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, $E''_p = k$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Masse-ressort vertical : $E_p = \frac{1}{2}kX^2 - mgX$, équilibre en $X_e = mg/k$ et $E''_p = k$ — **le poids déplace l'équilibre mais ne change pas ω_0** . Pendule simple : $E_p = -mg\ell \cos \theta$ et $E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$, d'où $\omega_0^2 = E''_p(0)/(m\ell^2) = g/\ell$.

✗ ATTENTION — La masse n'est pas toujours m

Quand la variable q n'est pas une longueur, $E_c = \frac{1}{2}\mu \dot{q}^2$ fait apparaître une **masse généralisée** μ ($\mu = m\ell^2$ pour le pendule repéré par θ) et $\omega_0 = \sqrt{E''_p(q_e)/\mu}$: toujours lire μ sur E_c . Et ne jamais linéariser autour d'un point qui n'est pas un équilibre : le terme d'ordre 1 ne disparaîtrait pas.

7 CAPACITÉ NUMÉRIQUE : ÉQUATION DU DEUXIÈME ORDRE NON LINÉAIRE

Méthode — du second ordre au premier ordre. On pose $v = \dot{x}$: l'équation $\ddot{x} = f(x, v)$ devient le système $\dot{x} = v$, $\dot{v} = f(x, v)$, et le schéma d'Euler explicite s'écrit $x_{k+1} = x_k + h_p v_k$, $v_{k+1} = v_k + h_p f(x_k, v_k)$. En **inversant l'ordre des deux lignes** — avancer d'abord la vitesse, puis la position avec la vitesse *nouvelle* — on obtient le schéma **semi-implicite**, qui conserve bien mieux l'énergie sur de longues durées : c'est le contrôle décisif pour un mouvement conservatif.

```

1 import numpy as np
2 g, L = 9.81, 0.80                                # pendule simple non lineaire
3 w02, T0 = g / L, 2 * np.pi * np.sqrt(0.80 / 9.81) # T0 : petites oscillations
4 hp = T0 / 2000                                     # pas tres petit devant T0
5 t = np.arange(0.0, 6 * T0, hp)
6 th = np.zeros(len(t)); om = np.zeros(len(t)); th[0] = np.radians(60.0)
7 for k in range(len(t) - 1):
8     om[k + 1] = om[k] - hp * w02 * np.sin(th[k]) # la vitesse d'abord
9     th[k + 1] = th[k] + hp * om[k + 1]           # puis la position
10 Em = 0.5 * L**2 * om**2 + g * L * (1 - np.cos(th)) # par unite de masse

```

Remarque. Effet du terme non linéaire : mesurer la période (écart entre deux maxima successifs de θ) pour plusieurs amplitudes et constater qu'elle *croît* avec l'amplitude ($T/T_0 = 1,002$ à 10° ; $1,07$ à 60° ; $1,37$ à 120°), alors que le modèle linéarisé prédit l'isochronisme. **Portrait de phase :** tracer $\dot{\theta}$ en fonction de θ ; chaque condition initiale donne une courbe fermée (état lié) ou une courbe ouverte traversant le graphe (révolution), les deux familles étant séparées par la **séparatrice** $E_m = 2mgl$. Contrôle obligatoire : E_m doit rester constante à mieux que quelques 10^{-3} .

8 DÉMONSTRATIONS À SAVOIR REFAIRE

- **Théorèmes cinétiques :** dériver $\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}$ et utiliser $m\vec{a} = \sum \vec{F}$. **Théorème de l'énergie mécanique :** séparer les puissances et utiliser $\mathcal{P}_{\text{cons}} = -dE_p/dt$.
- **Les trois énergies potentielles :** écrire δW et reconnaître $-dE_p$. **Non-conservativité d'un frottement :** comparer deux chemins joignant les mêmes points (un diamètre, $-2fR$; un demi-cercle, $-\pi fR$).
- **Équilibres et stabilité** à partir de $m\ddot{x} = -E'_p(x)$; **équation des petits mouvements** par le développement de Taylor de E_p à l'ordre 2, et $\omega_0 = \sqrt{E''_p(x_e)/\mu}$.
- **Orbite circulaire :** $E_m = -\frac{GMm}{2r} = -E_c = \frac{E_p}{2}$; **vitesse de libération** $v_{\text{lib}} = \sqrt{2GM/R}$.
- **Intégrale première du pendule :** $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}(\cos \theta - \cos \theta_0)$, puis $T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$.

► SAVOIR-FAIRE

- Calculer la puissance et le travail d'une force, reconnaître son caractère moteur ou résistant, repérer les forces qui ne travaillent pas.
- Choisir le théorème adapté : énergie cinétique pour relier deux états, puissance cinétique pour obtenir l'équation du mouvement.
- Établir ou citer les trois énergies potentielles en annonçant la référence; retrouver la force par $F_x = -dE_p/dx$.
- Reconnaître les cas de conservation de E_m , écrire l'intégrale première, en tirer la vitesse en tout point; mener un bilan énergétique avec frottements et commenter un rendement.
- Lire un profil d'énergie potentielle : zones accessibles, points de rebroussement, puits et barrières, états liés et de diffusion, direction et intensité de la force.
- Déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité, établir l'équation des petits mouvements, donner ω_0 et T_0 .
- Écrire un schéma numérique pour une équation du deuxième ordre non linéaire, tracer un portrait de phase, contrôler la conservation de l'énergie.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$; $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$; $E_c = \frac{1}{2}mv^2$; $\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}$; $\Delta E_c = \sum W$.
- Conservatif : $\delta W = -dE_p$, $W_{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B)$, $F_x = -\frac{dE_p}{dx}$. $E_p^{\text{pes}} = mgz$ ($\vec{u}_z$ ascendant); $E_p^{\text{él}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$; $E_p^{\text{grav}} = -\frac{GMm}{r}$; $E_p^{\text{Coul}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$.
- $E_m = E_c + E_p$; $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{non cons}}$; $\Delta E_m = W_{\text{non cons}}$; conservatif : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = E_m$.
- Équilibre : $E'_p(x_e) = 0$, stable si $E''_p(x_e) > 0$, et alors $\omega_0 = \sqrt{E''_p(x_e)/\mu}$ avec $E_c = \frac{1}{2}\mu\dot{q}^2$. **Orbite circulaire :** $E_m = -\frac{GMm}{2r}$; $v_{\text{lib}} = \sqrt{2GM/R} = 11,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ pour la Terre.
- Repères : $v = \sqrt{2gh}$ ($1 \text{ m} \rightarrow 4,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$); $1 \text{ kW}\cdot\text{h} = 3,6 \text{ MJ}$; $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $GM_T = 3,98 \times 10^{14} \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-2}$; $R_T = 6\,370 \text{ km}$; $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4)$.

✖ PIÈGES

- Appliquer la conservation de E_m en présence de frottements : c'est $\Delta E_m = W_{\text{non cons}} < 0$. Ou bien compter deux fois le travail d'une force conservative, dans le théorème de l'énergie cinétique et via son énergie potentielle.
- Se tromper de signe dans $F_x = -dE_p/dx$, ou écrire $E_p = mgz$ avec $\vec{u}_z$ descendant (c'est $-mgz$) ; comparer deux énergies calculées avec des références différentes.
- Confondre minimum (stable) et maximum (instable) de E_p ; croire que $E_m < 0$ révèle une erreur de calcul alors que c'est la signature d'un *état lié* ; lire une vitesse sur un graphe de E_p sans y porter le niveau E_m .
- Oublier que la réaction *normale* ne travaille pas, mais que la composante tangentielle de frottement, elle, travaille (et négativement).
- Linéariser E_p autour d'un point qui n'est pas un équilibre ; écrire $\omega_0 = \sqrt{E_p''/m}$ pour une variable angulaire ($\mu = m\ell^2$) ; utiliser l'isochronisme hors des petites oscillations (la période du pendule est déjà 7 % plus grande à 60°).
- En simulation, employer le schéma d'Euler explicite sur de longues durées : l'énergie mécanique dérive, parfois de plusieurs dizaines de pour-cent.