

Fiche de cours

Circuits dans l'ARQS

Charge, courant, tension, puissance ; dipôles R, L, C ; lois de Kirchhoff ; diviseurs ; résistances d'entrée et de sortie

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

1 CHARGE ÉLECTRIQUE ET INTENSITÉ DU COURANT

Définition. La **charge électrique** q se mesure en coulombs (C). Elle est **quantifiée** : toute charge est un multiple entier de la charge élémentaire $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C. Elle est **conservée** : la charge totale d'un système fermé ne varie pas.

Définition. L'**intensité** i du courant à travers une section orientée d'un conducteur est le **débit de charge** à travers cette section :

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{A} = \text{C} \cdot \text{s}^{-1}.$$

i est une grandeur *algébrique* : son signe dépend de l'orientation choisie, fixée une fois pour toutes par une flèche sur le schéma. Le sens conventionnel du courant est celui du déplacement des charges *positives*, donc l'inverse du déplacement des électrons dans un métal.

Propriété — compatibilité avec la quantification. Un courant de 1 mA correspond à $N = i/e \approx 6 \times 10^{15}$ électrons par seconde, dont les fluctuations relatives sont de l'ordre de $1/\sqrt{N} \approx 10^{-8}$: **à l'échelle macroscopique la charge se décrit comme une grandeur continue**, la granularité n'étant décelable qu'à très faible courant (bruit de grenaille).

Notation. Intensités : pA (fuite), μ A (capteur), mA (électronique), A (électroménager), 10^4 A (foudre). Tensions : μ V (signal biologique), mV (thermocouple), V (pile), 230 V (secteur), MV (ligne THT).

2 L'APPROXIMATION DES RÉGIMES QUASI STATIONNAIRES

Définition. Un signal électrique se propage le long des fils à une célérité c' de l'ordre de $c = 3,00 \times 10^8$ m·s⁻¹. Pour un circuit de plus grande dimension ℓ , l'information met donc une durée $\theta = \ell/c'$ à le parcourir. L'**ARQS** consiste à négliger θ devant la durée caractéristique T d'évolution des signaux :

$$\theta = \frac{\ell}{c} \ll T = \frac{1}{f} \quad \text{soit} \quad \ell \ll \frac{c}{f} = \lambda.$$

Propriété — conséquences. Dans l'ARQS, tout se passe comme si les signaux se propageaient *instantanément* : l'intensité est la **même en tout point d'une même branche** à chaque instant, et les lois des nœuds et des mailles s'appliquent à chaque instant, avec les valeurs instantanées.

★ EXEMPLE — quand l'ARQS tombe-t-elle en défaut ?

Circuit de travaux pratiques ($\ell \approx 1$ m) à $f = 1$ kHz : $\lambda = 3 \times 10^5$ m et $\ell/\lambda \approx 3 \times 10^{-6}$, l'ARQS est excellente. Le même circuit à $f = 1$ GHz : $\lambda = 0,30$ m, l'ARQS tombe en défaut et il faut une théorie des lignes. Réseau de distribution ($f = 50$ Hz, $\lambda = 6000$ km) : l'ARQS cesse d'être valable à l'échelle d'un continent.

3 POTENTIEL, TENSION, PUISSANCE

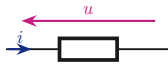
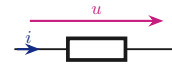
Définition. Le **potentiel** V est défini en chaque point d'un circuit à une constante additive près : on choisit un point de référence, la **masse**, où l'on pose $V = 0$. La **tension** entre A et B est la différence de potentiel $u_{AB} = V_A - V_B$ (V), grandeur algébrique représentée par une flèche allant de B vers A (la flèche pointe vers le premier indice).

Propriété — conséquence immédiate. $u_{AB} = -u_{BA}$; deux points reliés par un fil idéal sont au même potentiel, donc la tension entre eux est nulle. La somme des tensions le long d'un chemin fermé est nulle : c'est la loi des mailles.

Définition. Convention récepteur : les flèches de u et de i sont de sens *opposés* sur le dipôle. **Convention générateur** : elles sont de *même sens*. Dans les deux cas, la puissance *reçue* par le dipôle vaut, en convention récepteur,

$$\mathcal{P} = u i \quad (\text{W}),$$

et l'énergie reçue entre t_1 et t_2 vaut $W = \int_{t_1}^{t_2} u i \, dt$.

Figure 1 — Convention récepteur : $\mathcal{P} = ui$ est la puissance reçue.Figure 2 — Convention générateur : $\mathcal{P} = ui$ est la puissance fournie.

Remarque — le signe n'est pas une nature. Un dipôle fléché en convention récepteur pour lequel on trouve $\mathcal{P} = ui < 0$ fournit de l'énergie au reste du circuit ; une batterie en charge, elle, est un récepteur. C'est le *signe du calcul*, non le nom du composant, qui tranche.

4 LES DIPÔLES USUELS

Définition. La **caractéristique** d'un **dipôle** (composant à deux bornes) est la courbe $u = f(i)$ qui relie tension et intensité en régime établi. Le dipôle est **linéaire** si c'est une droite, **passif** si elle passe par l'origine, **symétrique** si elle est invariante par $(u, i) \mapsto (-u, -i)$.

Propriété — les trois dipôles linéaires, convention récepteur.

$$\boxed{u_R = Ri} \quad (\Omega) \quad \boxed{i_C = C \frac{du_C}{dt}} \quad (\text{F}) \quad \boxed{u_L = L \frac{di_L}{dt}} \quad (\text{H})$$

avec $q = C u_C$ pour le condensateur (q charge de l'armature d'où pointe la flèche de tension) ; la **conductance** est $G = 1/R$ (S).

Propriété — énergies et puissance. La résistance **dissipe** par **effet Joule** une puissance toujours positive, le condensateur et la bobine **stockent** de l'énergie sous forme électrique et magnétique :

$$\mathcal{P}_J = u_R i = Ri^2 = \frac{u_R^2}{R} \geq 0, \quad \mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2, \quad \mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i_L^2, \quad \mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

Idee de la démonstration : $\mathcal{P} = u_C i_C = C u_C \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)$, et de même pour L .

Notation. Ordres de grandeur : résistances de 10Ω à $1 \text{ M}\Omega$; condensateurs du nF au μF (quelques mF pour un condensateur de filtrage) ; bobines du mH au H.

Définition. Une **source idéale de tension** impose $u = E$ quel que soit le courant débité ; une **source idéale de courant** impose $i = \eta$ quelle que soit la tension à ses bornes. Aucune n'existe : une source réelle est décrite par un **modèle linéaire de Thévenin**, association série d'une source idéale de f.é.m. E et d'une **résistance interne** r , de caractéristique $\boxed{u = E - ri}$ en convention générateur.

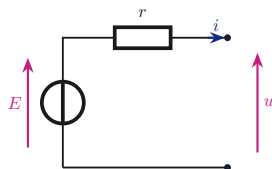
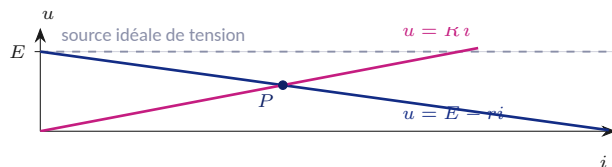


Figure 3 — Modèle de Thévenin

Figure 4 — Caractéristiques et point de fonctionnement P

Méthode — point de fonctionnement. Un générateur débitant dans un récepteur impose le *même* couple (u, i) aux deux dipôles : le point de fonctionnement est l'**intersection des deux caractéristiques** tracées dans le même repère. Si le récepteur est une résistance, la droite $u = Ri$ est la **droite de charge** ; s'il est non linéaire (diode, lampe), la résolution graphique est la seule méthode élémentaire.

5 LES LOIS DE KIRCHHOFF

Théorème — loi des nœuds. En un nœud, la somme algébrique des intensités est nulle :

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k i_k = 0} \quad \varepsilon_k = +1 \text{ si le courant arrive, } -1 \text{ s'il part.}$$

Idee : la charge est conservée et, dans l'ARQS, aucune charge ne s'accumule au nœud ; le débit entrant égale donc à chaque instant le débit sortant.

Théorème — loi des mailles. Pour toute maille orientée, la somme algébrique des tensions rencontrées est nulle :

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k u_k = 0}$$

($\varepsilon_k = +1$ si la flèche de u_k est dans le sens de parcours). *Idée* : le potentiel est une fonction bien définie des points du circuit, donc la somme des différences de potentiel le long d'un chemin fermé est nulle.

Méthode — résoudre un réseau. (i) choisir la masse ; (ii) orienter *tous* les courants et flécher *toutes* les tensions une fois pour toutes, en convention récepteur pour les dipôles passifs ; (iii) écrire les lois des nœuds ($n - 1$ indépendantes pour n nœuds) et des mailles ; (iv) injecter les relations constitutives, résoudre, puis contrôler homogénéité et cas limites.

6 ASSOCIATIONS ET PONTS DIVISEURS

Théorème — associations. Deux résistances parcourues par le même courant sont en **série** ; soumises à la même tension, elles sont en **parallèle** :

$$R_s = R_1 + R_2 \quad \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \text{ soit } R_p = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Ces résultats s'étendent de proche en proche à un nombre quelconque de résistances.

Remarque — contrôles. $R_p \leq \min(R_1, R_2) \leq \max(R_1, R_2) \leq R_s$: une association parallèle est *plus petite* que la plus petite des deux ; $R \parallel R = R/2$ et $R_1 \parallel R_2 \approx R_1$ dès que $R_1 \ll R_2$.

Théorème — pont diviseur de tension. Si R_1 et R_2 sont en *série*, donc traversées par le même courant, et si u est la tension aux bornes de l'ensemble, alors

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u.$$

Démonstration : $u = (R_1 + R_2) i$ et $u_1 = R_1 i$; on élimine i .

Théorème — pont diviseur de courant. Si R_1 et R_2 sont en *parallèle*, donc soumises à la même tension, et si i est l'intensité totale entrant dans l'association, alors

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i.$$

Démonstration : $u = R_1 i_1 = R_2 i_2$ et $i = i_1 + i_2$; on élimine i_2 puis u .

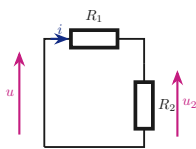


Figure 5 — Diviseur de tension : $u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$

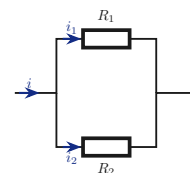


Figure 6 — Diviseur de courant : $i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$

✗ ATTENTION — La condition d'application, toujours

Le diviseur de *tension* exige que le même courant traverse les deux résistances : dès qu'une branche dérive du courant au point milieu, la formule est fautive. Le diviseur de *courant* exige que les deux résistances soient *réellement en parallèle*, donc soumises à la même tension. Vérifier cette hypothèse est la moitié du travail.

Remarque — diviseur chargé. Un diviseur $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ sous $u = 10 \text{ V}$ délivre $u_2 = 5,0 \text{ V}$ à vide ; branchons une charge $R_u = 10 \text{ k}\Omega$ en parallèle sur R_2 : la branche basse vaut $R_2 \parallel R_u = 5,0 \text{ k}\Omega$ et $u_2 = \frac{5,0}{10+5,0} \times 10 = 3,3 \text{ V}$. La charge *modifie* le diviseur : c'est tout l'enjeu des résistances d'entrée.

7 RÉSISTANCE D'ENTRÉE, RÉSISTANCE DE SORTIE

Définition. La **résistance d'entrée** $R_e = u_e / i_e$ d'un appareil est la résistance équivalente vue entre ses bornes d'entrée. La **résistance de sortie** R_s d'un montage est celle de son modèle de Thévenin vu des bornes de sortie, c'est-à-dire la résistance vue de la sortie **sources éteintes** (source de tension idéale remplacée par un fil, source de courant idéale par un circuit ouvert).

Propriété — valeurs usuelles. Oscilloscope $R_e \approx 1 \text{ M}\Omega$; voltmètre numérique $R_e \approx 10 \text{ M}\Omega$; ampèremètre, de $0,1 \Omega$ à quelques Ω ; GBF $R_s = 50 \Omega$ (norme).

Méthode — bien mesurer. Un **voltmètre** se branche en *dérivation*, avec $R_e \gg$ la résistance du dipôle observé ; un **ampèremètre** en *série*, avec une résistance interne $\ll$ celle de la branche ; un montage attaquant une charge R_u lui transmet une tension d'autant plus proche de sa tension à vide que $R_s \ll R_u$ (**adaptation en tension**).

Remarque — un GBF n'est pas idéal. De f.é.m. à vide $E = 5,00 \text{ V}$ et de résistance de sortie $R_s = 50 \Omega$, débitant dans $R_u = 50 \Omega$, il ne délivre que $u = E R_u / (R_s + R_u) = 2,50 \text{ V}$: d'où les deux graduations « charge 50Ω » et « haute impédance » de son afficheur.

8 BILANS DE PUISSANCE

Théorème — bilan global. La somme des puissances reçues par tous les dipôles d'un circuit est nulle à chaque instant, soit

$$\sum \mathcal{P}_{\text{fournie par les sources}} = \sum \mathcal{P}_{\text{dissipée}} + \frac{d}{dt} \left(\sum \mathcal{E}_{\text{stockée}} \right).$$

Idée : écrire la loi des mailles et la multiplier par l'intensité de la maille ; chaque terme devient une puissance.

Propriété — générateur réel en charge. Une source (E, r) débitant dans R fournit $\mathcal{P}_f = E i$, dissipe $r i^2$ en interne et délivre $\mathcal{P}_u = R i^2$ à la charge, avec $i = E / (R + r)$: le **rendement** $\eta = \mathcal{P}_u / \mathcal{P}_f = R / (R + r)$ est d'autant meilleur que $R \gg r$, tandis que la puissance utile est maximale pour $R = r$ (avec alors $\eta = 1/2$ seulement) : rendement et puissance transmise sont deux objectifs distincts.

9 SAVOIR-FAIRE ET DÉMONSTRATIONS EXIGIBLES

► SAVOIR-FAIRE

- *Démonstrations à savoir refaire* : loi des nœuds à partir de la conservation de la charge dans l'ARQS ; condition $\ell \ll c/f$; résistances équivalentes série et parallèle ; les deux ponts diviseurs, hypothèse comprise ; $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u^2$ et $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2$ par intégration de $\mathcal{P} = u i$; puissance maximale transmise par (E, r) à R , par étude de $R \mapsto R E^2 / (R + r)^2$.
- Exprimer une intensité comme un débit de charge, justifier la description continue de la charge, écrire la condition d'ARQS et l'appliquer à un circuit donné.
- Algébriser un circuit (masse, orientation, fléchage, convention fixée une fois pour toutes), écrire les lois des nœuds et des mailles et résoudre un réseau à deux mailles.
- Simplifier un réseau de proche en proche par associations série et parallèle ; établir et exploiter les deux ponts diviseurs après vérification de leur hypothèse.
- Modéliser une source réelle par une représentation de Thévenin ; déterminer E et r à partir d'une caractéristique ou de deux points de fonctionnement.
- Déterminer un point de fonctionnement, y compris graphiquement pour un dipôle non linéaire ; évaluer une résistance d'entrée ou de sortie et en déduire l'erreur commise par un appareil de mesure ; mener un bilan de puissance complet et discuter un rendement.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- $i = \frac{dq}{dt}$; ARQS : $\ell \ll c/f$; $\mathcal{P} = u i$ (convention récepteur) ; $\mathcal{P}_J = R i^2 = u_R^2 / R$.
- Dipôles : $u_R = R i$; $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, $q = C u_C$, $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2$; $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i_L^2$.
- Associations : $R_1 + R_2$; $R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Diviseurs : $u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$ (série) ; $i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$ (parallèle).
- Source réelle : $u = E - r i$; $i_{cc} = E / r$; $\eta = \frac{R}{R + r}$; $\mathcal{P}_u$ maximale pour $R = r$. Repères : $1 \text{ M}\Omega$ (oscilloscope), $10 \text{ M}\Omega$ (voltmètre), 50Ω (GBF), $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$.

✗ PIÈGES

- Écrire les lois de Kirchhoff sans avoir orienté le circuit, changer de convention en cours de résolution, additionner des résistances en parallèle ou oublier d'inverser la somme des inverses.
- Appliquer un pont diviseur de tension à deux résistances dont l'une est shuntée par une branche dérivée : le courant n'y est plus le même.
- Confondre $i = C du/dt$ et $u = C di/dt$ (pour la bobine, $u = L di/dt$) ; croire qu'un condensateur ou une bobine idéale dissipe de l'énergie.
- Brancher un ampèremètre en dérivation ou un voltmètre en série ; oublier que la masse de l'oscilloscope et celle du GBF sont reliées ; négliger $R_s = 50 \Omega$ sur une faible charge.
- Confondre rendement maximal ($R \gg r$) et puissance maximale transmise ($R = r$) ; oublier de vérifier $\ell \ll \lambda$.