

Fiche de cours Cinématique du point

Référentiel, systèmes de coordonnées, vitesse et accélération, repère de Frenet

définitions · méthodes · démonstrations exigibles · pièges

1 ESPACE, TEMPS, RÉFÉRENTIEL

Définition. En mécanique classique, l'espace est euclidien et de dimension trois, et le temps est **absolu** : deux observateurs quelconques mesurent la même durée entre deux événements et la même distance entre deux points au même instant. Le temps est repéré par une **date** t , réel croissant, mesurée par une horloge.

Définition. Un **référentiel** $\mathcal{R}$ est la donnée d'un solide de référence (auquel on associe un repère d'espace) et d'une horloge. Décrire un mouvement sans préciser le référentiel n'a aucun sens : **le mouvement est relatif**.

Notation. On fixe dans $\mathcal{R}$ une origine O et une base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: c'est le **repère** $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. La position de M est donnée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Un voyageur assis dans un train est immobile dans le référentiel du wagon, en mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre, et décrit une courbe compliquée dans le référentiel héliocentrique : aucune de ces descriptions n'est « la vraie ».

Remarque — limites du modèle classique. Le caractère absolu de l'espace et du temps est une *approximation*, prise en défaut dès que v n'est plus très petite devant c : les **horloges des satellites GPS** dérivent de $38 \mu\text{s}$ par jour (soit 10 km d'erreur de position) sans corrections relativistes, et les **muons atmosphériques**, de durée de vie propre $2,2 \mu\text{s}$, devraient s'arrêter après 660 m alors qu'on les détecte au sol. À l'échelle atomique, c'est la notion même de trajectoire qui perd son sens (mécanique quantique).

2 PARAMÉTRAGE, TRAJECTOIRE, DEGRÉS DE LIBERTÉ

Définition. La **trajectoire** de M dans $\mathcal{R}$ est l'ensemble des positions occupées au cours du temps. Les **équations horaires** donnent les coordonnées en fonction de t ; l'**équation de la trajectoire** s'obtient en *éliminant* t entre elles. Le nombre de **degrés de liberté** est le nombre de paramètres indépendants repérant M : 3 dans l'espace, 2 sur une surface, 1 sur une courbe.

Méthode — choisir ses coordonnées. Regarder les *symétries* : rectiligne ou parabolique $\rightarrow$ cartésiennes ; circulaire, en spirale ou autour d'un centre $\rightarrow$ cylindriques ; sur une sphère $\rightarrow$ sphériques. Un bon choix réduit le nombre de coordonnées variables, souvent à une seule.

3 VITESSE ET ACCÉLÉRATION

Définition. Le **vecteur vitesse** et le **vecteur accélération** de M dans $\mathcal{R}$ sont les dérivées

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}, \quad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}.$$

L'indice $\mathcal{R}$ rappelle que la dérivation se fait à *vecteurs de base de $\mathcal{R}$ fixes* ; on l'omet quand aucune ambiguïté n'est possible. Unités : $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Propriété — la vitesse est tangente. En notant $d\overrightarrow{OM}$ le **déplacement élémentaire** entre t et $t + dt$, $\vec{v} = d\overrightarrow{OM}/dt$ lui est colinéaire, donc **toujours tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement** ; $\vec{a}$, lui, n'a aucune raison d'être tangent. Enfin $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne dépendent pas de l'origine O (deux origines fixes diffèrent d'un vecteur constant), mais bien du *référentiel*.

4 COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Propriété. La base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est *fixe* dans $\mathcal{R}$: dériver revient à dériver les composantes.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z, \quad d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z,$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$$

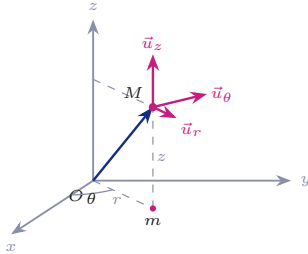
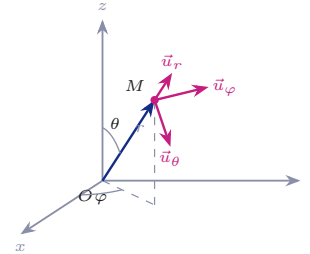
$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

5 COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Définition. Soit m le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) . On pose $r = Om \geq 0$, distance de M à l'axe Oz , θ l'angle orienté $(\vec{u}_x, \vec{Om})$ et z la cote. On construit la **base locale** $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, orthonormée directe, avec

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y, \quad \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y.$$

Cette base **dépend de la position du point** : elle tourne avec lui. Quand $z = 0$ on parle de **coordonnées polaires** (r, θ) .

Figure 1 — Coordonnées cylindriques (r, θ, z) et base locale.Figure 2 — Coordonnées sphériques (r, θ, φ) et base locale.

Théorème — dérivées des vecteurs de base. La base locale ne dépend du temps que par θ , donc

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta, \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r, \quad \frac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0}.$$

Idée : dériver $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$ par rapport à t ($\vec{u}_x, \vec{u}_y$ fixes) et reconnaître $\vec{u}_\theta$; de même pour $\vec{u}_\theta$. Géométriquement : dériver un vecteur unitaire tournant, c'est le faire tourner d'un quart de tour direct et le multiplier par $\dot{\theta}$.

Théorème — expressions exigibles. Avec $\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$:

$$\begin{aligned} d\vec{OM} &= dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z & \vec{v} &= \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z \end{aligned}$$

Idée : dériver $\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$ en traitant r, z et $\vec{u}_r$ comme fonctions du temps, puis recommencer sur $\vec{v}$.

✖ **ATTENTION — Les deux termes que l'on oublie**

Dans $\vec{a}$, les termes $-r\dot{\theta}^2$ (**accélération centripète**) et $2\dot{r}\dot{\theta}$ (**terme de Coriolis**) viennent de la *rotation de la base*, non de la dérivation des composantes : écrire $\vec{a} = \ddot{r} \vec{u}_r + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$ est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

6 COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Définition. $r = OM \geq 0$; $\theta \in [0 ; \pi]$ est la **colatitude**, angle entre $\vec{u}_z$ et $\vec{OM}$; $\varphi \in [0 ; 2\pi[$ est la **longitude**, angle du projeté dans (Oxy) . La base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est orthonormée directe, chaque vecteur pointant vers les valeurs croissantes de la coordonnée correspondante ($\vec{u}_\theta$ vers le « sud », $\vec{u}_\varphi$ vers l'« est »).

Théorème — déplacement élémentaire. En faisant varier une seule coordonnée à la fois, on lit géométriquement sur la figure 2 :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r, \quad d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

Le facteur $r \sin \theta$ est le rayon du *parallèle* sur lequel se déplace M lorsque seul φ varie : c'est la distance de M à l'axe Oz .

✖ **ATTENTION — Limite du programme**

En coordonnées sphériques, **les expressions des composantes de la vitesse et de l'accélération ne sont pas exigibles** : le programme demande d'« établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération *dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques* ». En sphériques, on sait construire le trièdre local et écrire $d\vec{OM}$ — rien de plus. Tout énoncé utilisant $\vec{a}$ en sphériques est hors sujet en MPSI.

7 REPÈRE DE FRET ET COURBURE (TRAJECTOIRE PLANE)

Définition. On oriente la trajectoire et on note $s(t)$ l'**abscisse curviligne**, telle que $ds = \|d\vec{OM}\|$ pour un mouvement dans le sens positif. La **base de Frenet** en M est $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$: $\vec{u}_T$ unitaire tangent orienté dans le sens du mouvement, $\vec{u}_N$ unitaire normal dirigé **vers le centre de courbure** (vers l'intérieur de la concavité).

Définition. Le **cercle osculateur** en M est le cercle tangent à la trajectoire qui épouse le mieux la courbe au voisinage de M ; son rayon $R_c > 0$ est le **rayon de courbure** et son centre est $C = M + R_c \vec{u}_N$. Une droite correspond à $R_c \rightarrow +\infty$, un cercle de rayon R à $R_c = R$ partout.

Théorème — décomposition de Frenet. Pour un mouvement plan de vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_T$ avec $v = \frac{ds}{dt} > 0$:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_T} \vec{u}_T + \underbrace{\frac{v^2}{R_c}}_{a_N} \vec{u}_N$$

Idée : dériver $\vec{v} = v \vec{u}_T$; le premier terme vient de la variation de la *norme*, le second de la rotation de $\vec{u}_T$, dont la dérivée vaut $d\vec{u}_T/dt = (v/R_c) \vec{u}_N$. Comme $a_N \geq 0$ **toujours**, l'accélération pointe du côté concave; et le signe de $a_T = \vec{a} \cdot \vec{u}_T$, celui de $\vec{a} \cdot \vec{v}$, dit si le mouvement est **accélééré** (> 0), **uniforme** ($= 0$) ou **retardé** (< 0).

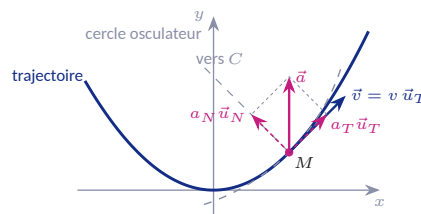


Figure 3 — Base de Frenet sur une trajectoire plane : $\vec{v}$ est tangente, $\vec{a}$ est tournée vers la concavité.

Méthode — déterminer un rayon de courbure. Calculer $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans un système commode, puis $v = \|\vec{v}\|$, $a_T = dv/dt$ et $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$, d'où $R_c = v^2/a_N$; on peut aussi projeter directement $\vec{a}$ sur $\vec{u}_N$.

8 MOUVEMENTS TYPES

Propriété — mouvement rectiligne. La trajectoire est portée par une droite fixe, d'où une seule coordonnée x . Il est **uniforme** si v est constante ($x = v_0 t + x_0$, $\vec{a} = \vec{0}$), **uniformément accéléré** si $\vec{a} = a_0 \vec{u}_x$ est constant :

$$v(t) = a_0 t + v_0, \quad x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0, \quad v^2 - v_0^2 = 2a_0 (x - x_0),$$

la dernière relation, obtenue en éliminant t , évitant bien des calculs.

Théorème — mouvement à vecteur accélération constant. Si $\vec{a} = \vec{a}_0$ est constant, une double intégration vectorielle donne $\vec{v}(t) = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$ et $\vec{OM}(t) = \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{OM}_0$. Le mouvement est **plan** (plan passant par M_0 et dirigé par $\vec{v}_0$ et $\vec{a}_0$) et la trajectoire est une **parabole** d'axe parallèle à $\vec{a}_0$ — sauf si $\vec{v}_0$ et $\vec{a}_0$ sont colinéaires, le mouvement étant alors rectiligne.

Méthode — équation de la trajectoire. Avec $\vec{a}_0 = -g \vec{u}_y$ et $\vec{v}_0 = v_0(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y)$ depuis l'origine, on tire $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ de la première équation horaire et on le reporte dans la seconde : $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$.

Théorème — mouvement circulaire. Le point décrit un cercle de centre O et de rayon R : $r = R$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, et il ne reste qu'un degré de liberté, $\theta(t)$. On note $\omega = \dot{\theta}$ la **vitesse angulaire** ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$). Alors

$$\vec{OM} = R \vec{u}_r, \quad \boxed{\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta}, \quad \boxed{\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta}$$

Si $\dot{\theta} > 0$, $\vec{u}_\theta = \vec{u}_T$ et $-\vec{u}_r = \vec{u}_N$: on retrouve $a_N = v^2/R$, $a_T = dv/dt = R \ddot{\theta}$ et $R_c = R$.

Propriété — circulaire uniforme. Si $\dot{\theta} = \omega$ est constante, $v = R|\omega|$ est constante, la période vaut $T = 2\pi/|\omega|$, et $\vec{a} = -R\omega^2 \vec{u}_r$ est **purement centripète**, de norme constante $a = R\omega^2 = v^2/R = v|\omega|$. **Un mouvement circulaire uniforme n'a pas une accélération nulle** : seule la *norme* de la vitesse est constante, pas sa direction.

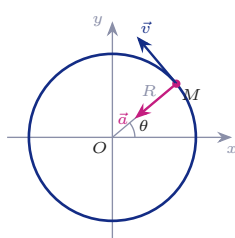


Figure 4 — Circulaire uniforme : $\vec{a}$ est centripète.

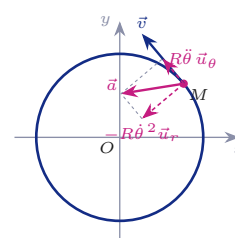


Figure 5 — Circulaire accéléré ($\ddot{\theta} > 0$) : $\vec{a}$ est en avance sur $-\vec{u}_r$.

9 CAPACITÉ EXPÉRIMENTALE : EXPLOITER UN ENREGISTREMENT VIDÉO

Méthode — pointage vidéo. Un logiciel fournit une suite de positions (x_k, y_k) aux dates $t_k = k \Delta t$, Δt étant l'inverse de la fréquence d'acquisition. On estime la vitesse par une **différence centrée**, bien plus précise qu'une différence à droite : $v_{x,k} \simeq \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2 \Delta t}$ et $a_{x,k} \simeq \frac{v_{x,k+1} - v_{x,k-1}}{2 \Delta t} \simeq \frac{x_{k+2} - 2x_k + x_{k-2}}{4 \Delta t^2}$. La vitesse n'est donc pas calculable aux points extrêmes. Le vecteur vitesse tracé en M_k doit apparaître *tangent* à la trajectoire : c'est le premier contrôle de cohérence.

```
1 t, x, y = np.loadtxt("pointage.csv", delimiter=",", unpack=True) ; dt = t[1] - t[0]
2 vx, vy = (x[2:] - x[:-2]) / (2*dt), (y[2:] - y[:-2]) / (2*dt) # k = 1 ... N-2
3 ax, ay = (vx[2:] - vx[:-2]) / (2*dt), (vy[2:] - vy[:-2]) / (2*dt)
4 print(np.hypot(vx, vy), np.mean(ay)) # ~ -9.8 m/s^2 en chute libre
```

10 DÉMONSTRATIONS EXIGIBLES ET SAVOIR-FAIRE

► SAVOIR-FAIRE

- **Démonstrations à savoir refaire** : $d\vec{u}_r/dt = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $d\vec{u}_\theta/dt = -\dot{\theta} \vec{u}_r$, puis $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en cylindriques ; $d\vec{OM}$ en sphériques ; décomposition de Frenet ; mouvement à accélération constante ; $a = v^2/R$ pour le circulaire uniforme.
- Choisir référentiel, repère et système de coordonnées adaptés ; compter les degrés de liberté.
- Établir $d\vec{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en cartésiennes et en cylindriques ; construire le trièdre local en sphériques.
- Passer des équations horaires à l'équation de la trajectoire par élimination de t ; traiter un mouvement à accélération constante (portée, flèche, durée de vol).
- Traiter un mouvement circulaire uniforme ou non : $v = R|\dot{\theta}|$, $a_N = v^2/R$, $a_T = R\ddot{\theta}$.
- Situer qualitativement $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sur une trajectoire ; conclure sur le signe de $\vec{a} \cdot \vec{v}$; calculer $R_c = v^2/a_N$. Exploiter un pointage vidéo par différences centrées.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- Cartésiennes : $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$; $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$.
- Cylindriques : $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$; $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$.
- Sphériques (seulement) : $d\vec{OM} = r \vec{u}_r$; $d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$.
- Frenet : $\vec{v} = v \vec{u}_T$; $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R_c} \vec{u}_N$; $R_c = \frac{v^2}{a_N}$. Circulaire : $v = R|\dot{\theta}|$; $a_N = \frac{v^2}{R}$; $a_T = R\ddot{\theta}$; uniforme : $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.
- Accélération constante : $d\vec{OM} = \frac{1}{2} a_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{OM}_0$; rectiligne : $v^2 - v_0^2 = 2a_0 \Delta x$.
- Ordres de grandeur : marcheur $1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, voiture $30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, avion $250 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, satellite bas $7,7 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$; $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; voiture $\approx 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; centrifugeuse 10 à 100 g.

✗ PIÈGES

- Dériver les composantes en oubliant que $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ tournent : $\vec{a} \neq \ddot{r} \vec{u}_r + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$.
- Écrire $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r$ pour un mouvement circulaire : $\dot{r} = 0$ et $\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta$. Confondre dv/dt (dérivée de la norme) et $|\dot{\vec{a}}|$: égales seulement en rectiligne.
- Croire qu'un mouvement circulaire uniforme a une accélération nulle, ou qu'accélération nulle entraîne vitesse nulle.
- Confondre $\dot{\theta}$ ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) et $v = R|\dot{\theta}|$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) ; travailler en degrés là où la formule suppose des radians.
- Utiliser $\vec{v}$ ou $\vec{a}$ en sphériques (hors programme) ; oublier le $\sin \theta$ de $d\vec{OM}$ ou prendre θ pour une latitude.
- Oublier de préciser le référentiel, ou en changer en cours de calcul ; orienter $\vec{u}_N$ « vers l'extérieur » alors qu'il pointe vers le centre de courbure ($a_N = v^2/R_c > 0$).