

Fiche de cours

Champ magnétique et forces de Laplace

Sources et cartes de champ, flux, moment magnétique, force et couple de Laplace, champ tournant

définitions · cartes de champ · démonstrations exigibles · pièges

1 SOURCES DE CHAMP MAGNÉTIQUE, ORDRES DE GRANDEUR

Définition. Le **champ magnétique** $\vec{B}$ est le champ vectoriel qui, en chaque point de l'espace, traduit l'action magnétique subie par une charge en mouvement ($\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$, chapitre 11) ou par un courant (force de Laplace, ci-dessous). Il s'exprime en **teslas** (T), avec $T = \text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Propriété — les deux sources. Un champ magnétique est créé par **des courants électriques** (circuits, bobines, électroaimants) ou par **des aimants permanents** — qui sont eux aussi, à l'échelle microscopique, des assemblées de courants élémentaires. **Il n'existe pas de « charge magnétique »** : on ne peut pas isoler un pôle nord.

Notation. Expressions fournies. Calculer $\vec{B}$ à partir de ses sources est *hors programme* : les expressions ci-dessous sont toujours données, on se contente de les exploiter. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ est la perméabilité du vide.

Distribution	Champ	Application numérique
fil rectiligne infini, à la distance r	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$	$I = 10 \text{ A}, r = 5,0 \text{ cm} : B = 4,0 \times 10^{-5} \text{ T}$
centre d'une bobine plate de N spires de rayon R	$B = \frac{\mu_0 N I}{2R}$	$R = 5,0 \text{ cm}, I = 1,0 \text{ A} : 1,3 \times 10^{-5} \text{ T}$ si $N = 1$, $1,3 \text{ mT}$ si $N = 100$
axe d'une spire, à la distance z	$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$	décroît en $1/z^3$ pour $z \gg R$
intérieur d'une bobine longue (n spires par mètre)	$B = \mu_0 n I$ (nul à l'extérieur)	$n = 1\,000 \text{ m}^{-1}, I = 1,0 \text{ A} : B = 1,3 \text{ mT}$
axe d'un aimant de moment m , à la distance z	$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$	$m = 0,10 \text{ A} \cdot \text{m}^2, z = 5,0 \text{ cm} : B = 1,6 \times 10^{-4} \text{ T}$

★ EXEMPLE — les ordres de grandeur à citer

Champ **terrestre** $\approx 5 \times 10^{-5} \text{ T}$ (composante horizontale $\approx 2 \times 10^{-5} \text{ T}$ en France); fil domestique (1 A à 1 cm) $\approx 2 \times 10^{-5} \text{ T}$; bobine de TP 1 à 10 mT; **aimant permanent** 0,1 à 1 T; électroaimant $\approx 1 \text{ T}$; **IRM** 1 à 3 T; aimant supraconducteur $\approx 20 \text{ T}$; milieu interstellaire $\approx 10^{-10} \text{ T}$.

✖ ATTENTION — un champ, deux rôles

Distinguer en permanence le champ **extérieur** subi $\vec{B}_{\text{ext}}$, créé par les autres sources, et le champ **propre** créé par le circuit étudié : **seul le champ extérieur intervient dans la force de Laplace** — un circuit ne s'exerce pas de force sur lui-même dans ce cadre.

2 CARTES DE CHAMP : LIRE ET TRACER

Propriété — lignes de champ. Une **ligne de champ** est une courbe tangente en chacun de ses points à $\vec{B}$, orientée dans le sens de $\vec{B}$. Les lignes de champ magnétique sont **toujours fermées** (elles n'ont ni source ni puits : contrairement au champ électrique, elles ne partent pas d'un pôle pour mourir sur l'autre; elles traversent l'aimant ou la bobine).

Méthode — lire une carte de champ. (i) Là où les lignes sont **parallèles et équidistantes**, le champ est **uniforme**; (ii) là où elles se **resserrent**, le champ est **plus intense**; là où elles s'écartent, il est **plus faible**; (iii) les **sources** sont les régions autour desquelles les lignes s'enroulent, là où le champ est le plus intense; (iv) deux lignes de champ ne se croisent jamais, sauf en un point où $\vec{B} = \vec{0}$.

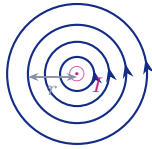


Figure 1 — Fil infini : cercles centrés sur le fil, $B \propto 1/r$.

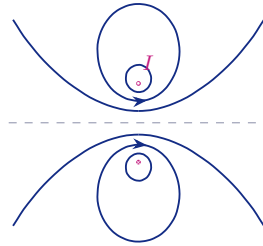


Figure 2 — Spire : lignes fermées enlacant le fil, champ maximal au centre et le long de l'axe.

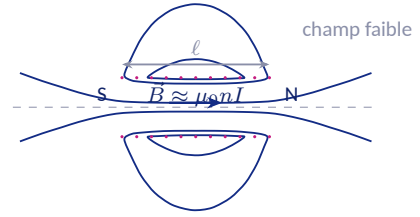


Figure 3 — Bobine longue : champ quasi uniforme à l'intérieur, faible à l'extérieur. Carte identique à celle d'un aimant droit.

Propriété — l'aimant droit et le solénoïde. Les deux cartes sont identiques. On appelle **pôle nord** la face par laquelle les lignes sortent de l'aimant, **pôle sud** celle par laquelle elles rentrent : à l'intérieur de l'aimant, les lignes vont du sud vers le nord.

Méthode — produire un champ quasi uniforme. Une **bobine longue** ($\ell \gg R$), dans sa partie centrale : $B = \mu_0 n I$ à quelques pour cent près ; ou **deux bobines de Helmholtz** (rayon R , même axe, distantes de R), où $B = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \mu_0 N I / R$ au milieu, uniforme au second ordre près ; ou l'**entrefer** d'un aimant en U.

3 SYMÉTRIES ET INVARIANCES DES SOURCES

Méthode — exploiter les symétries. On admet les règles suivantes, qui portent sur la distribution de courants :

- **Invariances.** Si la distribution est invariante par translation selon Oz , $\vec{B}$ ne dépend pas de z ; si elle est invariante par rotation autour de Oz , $\vec{B}$ ne dépend pas de θ . On cherche les invariances avant tout calcul : elles réduisent le nombre de variables.
- **Plan de symétrie Π** (les courants sont inchangés par la réflexion) : en tout point de Π , $\vec{B}$ est orthogonal à Π — à l'envers du champ électrique : c'est la conséquence du produit vectoriel.
- **Plan d'antisymétrie Π^*** (la réflexion renverse les courants) : en tout point de Π^* , $\vec{B}$ est contenu dans Π^* .

Remarque — fil rectiligne infini. Invariance par translation selon Oz et par rotation autour de Oz : $\vec{B} = \vec{B}(r)$. Tout plan contenant le fil est un plan de symétrie, donc $\vec{B}$ lui est orthogonal : $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$. Les lignes de champ sont des cercles d'axe le fil (figure 1) — et l'on a obtenu cela sans aucun calcul.

4 FLUX MAGNÉTIQUE ET CONSERVATION DU FLUX

Définition. Le **flux** de $\vec{B}$ à travers une surface orientée S de normale unitaire $\vec{n}$ est $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$, soit, pour un champ uniforme et une surface plane d'aire S ,

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos \alpha \quad \vec{S} = S \vec{n}, \quad \alpha = (\vec{n}, \vec{B}), \quad \Phi \text{ en webers (Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2\text{)}.$$

✗ ATTENTION — orienter avant de calculer

Un flux n'a de signe qu'une fois le contour orienté ; la normale $\vec{n}$ s'en déduit par la **règle de la main droite**, et changer l'orientation change le signe de Φ . Pour N spires accolées, $\Phi = N B S \cos \alpha$.

Théorème — conservation du flux magnétique. Le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul. Il en résulte deux conséquences utilisées en permanence :

- le flux à travers **toute** surface s'appuyant sur un même contour fermé orienté est le **même** : on peut choisir la surface la plus commode, en général la surface plane ;
- le flux est **constant le long d'un tube de champ** : si la section d'un tube passe de S_1 à S_2 , alors $B_1 S_1 = B_2 S_2$. Un resserrement des lignes signifie donc un champ plus intense — c'est la justification de la règle de lecture des cartes.

5 MOMENT MAGNÉTIQUE

Définition. Une **boucle de courant plane**, d'aire S , parcourue par le courant I et orientée par la normale $\vec{n}$ déduite du sens du courant par la règle de la main droite, possède le **moment magnétique**

$$\vec{m} = I S \vec{n} = I \vec{S} \quad (\text{A} \cdot \text{m}^2).$$

Pour une bobine plate de N spires, $\vec{m} = N I \vec{S}$. $\vec{m}$ ne dépend que du courant et de la surface, pas de la forme du contour.

Définition. Par analogie, on associe à un **aimant** un moment magnétique $\vec{m}$, dirigé du pôle sud vers le pôle nord de l'aimant (donc dans le sens du champ qu'il crée en son centre). Ordres de grandeur : aiguille de boussole ou petit aimant de TP $\approx 0,1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$; aimant de haut-parleur $\approx 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$; bobine plate de TP ($N = 500$, $S = 20 \text{ cm}^2$, $I = 1 \text{ A}$) : $m = 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

6 ACTIONS D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE EXTÉRIEUR UNIFORME

Définition. La **force de Laplace** subie par un élément de circuit filiforme $d\vec{\ell}$, orienté dans le sens du courant I , placé là où règne le champ extérieur $\vec{B}$, est

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

C'est la traduction macroscopique de la force de Lorentz subie par les porteurs de charge mobiles. Sa densité linéique est $I \vec{u}_{d\ell} \wedge \vec{B}$, en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Théorème — résultante sur une portion de circuit dans un champ uniforme. Si $\vec{B}$ est uniforme,

$$\vec{F} = \int I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I \left(\int d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = \boxed{I \vec{AB} \wedge \vec{B}}$$

pour un circuit allant de A à B : **la résultante ne dépend que des extrémités**, pas de la forme du conducteur. En particulier, pour une **barre rectiligne** de longueur ℓ , orientée par $\vec{u}$ dans le sens du courant : $\vec{F} = I \ell \vec{u} \wedge \vec{B}$, de norme $F = I \ell B |\sin \theta|$ avec $\theta = (\vec{u}, \vec{B})$. **Et pour un circuit fermé**, $\oint d\vec{\ell} = \vec{0}$ donc $\vec{F} = \vec{0}$: un champ uniforme ne peut pas déplacer un circuit fermé, il ne peut que le faire tourner.

Remarque — ordre de grandeur. $I = 2,0 \text{ A}$, $\ell = 10 \text{ cm}$, $B = 0,10 \text{ T}$ orthogonal : $F = 20 \text{ mN}$, le poids de 2 g. **Les forces de Laplace de laboratoire sont faibles** ; un moteur compense par le nombre de spires et un fort champ d'entrefer.

Propriété — puissance des forces de Laplace. En translation, $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (soit $I \ell B v$ pour une barre si $\vec{F}$ et $\vec{v}$ sont de même sens) ; en rotation autour d'un axe fixe, $\mathcal{P} = \Gamma_z \omega$. **Contrairement à la force magnétique sur une charge, la force de Laplace travaille** : c'est tout l'intérêt de l'effet moteur.

Théorème — couple sur un circuit plan dans un champ uniforme. Un circuit plan de moment magnétique $\vec{m}$, placé dans un champ extérieur *uniforme* $\vec{B}$, subit une résultante nulle et un couple de moment

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}} \quad (\text{N} \cdot \text{m}), \quad \Gamma = m B |\sin \theta| \quad \text{avec } \theta = (\vec{m}, \vec{B}).$$

Démonstration exigible (spire rectangulaire). Spire $a \times b$, courant I , axe de rotation Oz vertical passant par les milieux des côtés de longueur b , champ $\vec{B} = B \vec{u}_x$ horizontal. On note θ l'angle $(\vec{m}, \vec{B})$.

- Les deux côtés de longueur a sont *parallèles* à Oz , donc orthogonaux à $\vec{B}$: ils subissent les forces $\pm I a B \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \pm I a B \vec{u}_y$, opposées et appliquées à la distance $\frac{b}{2}$ de l'axe : elles forment un **couple**, de bras de levier $\frac{b}{2} \sin \theta$ chacune, d'où $\Gamma = 2 \times I a B \times \frac{b}{2} \sin \theta = I a b B \sin \theta = m B \sin \theta$ avec $m = I a b$.
- Les deux côtés de longueur b subissent des forces opposées portées par Oz : résultante nulle et moment nul par rapport à Oz , ils ne contribuent pas.
- Le sens est celui qui **ramène $\vec{m}$ sur $\vec{B}$** , d'où $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$. Le résultat s'étend à un circuit plan quelconque par découpage en rectangles.

Propriété — énergie potentielle, positions d'équilibre. L'action d'un champ uniforme sur un dipôle magnétique dérive de l'énergie potentielle (expression fournie)

$$\boxed{E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m B \cos \theta} \quad \text{et} \quad \Gamma_z = -\frac{dE_p}{d\theta} = -m B \sin \theta.$$

Les positions d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$:

- $\theta = 0$ ($\vec{m}$ **parallèle** à $\vec{B}$) : $E_p = -mB$ **minimale**, équilibre **stable** ;
- $\theta = \pi$ ($\vec{m}$ antiparallèle) : $E_p = +mB$ maximale, équilibre **instable**.

Le couple aligne toujours le moment magnétique avec le champ : c'est le principe de la boussole, et la raison pour laquelle le pôle nord d'une aiguille indique le nord magnétique.

Propriété — petites oscillations d'une boussole. Pour un aimant de moment m et de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation, le théorème du moment cinétique donne $J\ddot{\theta} = -mB \sin \theta$, soit pour les petits angles $\ddot{\theta} + \frac{mB}{J}\theta = 0$:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mB}{J}}}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mB}}.$$

Mesurer T_0 donne accès au produit mB : c'est une méthode usuelle de mesure du champ terrestre.

Remarque — aiguille de boussole. $m = 0,10 \text{ A} \cdot \text{m}^2$, aiguille de 1,0 g et 3,0 cm ($J = \frac{1}{12} M L^2 = 7,5 \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$), $B_h = 2,0 \times 10^{-5} \text{ T}$: $T_0 = 1,2 \text{ s}$.

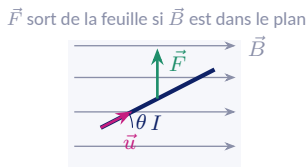


Figure 4 — Barre : $\vec{F} = I\ell \vec{u} \wedge \vec{B}$, orthogonale à la fois à la barre et au champ, de norme $I\ell B \sin \theta$.

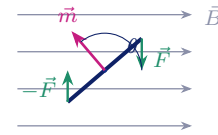


Figure 5 — Cadre vu de dessus : résultante nulle, couple $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ qui ramène $\vec{m}$ vers $\vec{B}$; $E_p = -mB \cos \theta$ est minimale en $\theta = 0$.

7 LES APPLICATIONS À CONNAÎTRE

Propriété — rails de Laplace, version « force ». Deux rails horizontaux distants de ℓ reliés à un **générateur de courant** imposant I , une barre de masse M en travers, un champ $\vec{B}$ vertical : la barre subit $F = BI\ell$ et accélère ; avec un frottement fluide $-\lambda v$, $v \rightarrow v_\infty = BI\ell/\lambda$. **Le courant étant imposé**, on traite le dispositif sans parler d'induction (chapitre 22).

Propriété — effet moteur. Un cadre de N spires d'aire S parcouru par I , mobile autour d'un axe orthogonal à $\vec{B}$, subit $\Gamma_z = -NISB \sin \theta$: il tourne vers $\theta = 0$ puis s'arrête. Un **collecteur** inverse le courant à chaque demi-tour, rendant le couple toujours moteur, de valeur **moyenne** $\langle \Gamma \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi NISB \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} NISB \approx 0,64 NISB$.

Propriété — haut-parleur électrodynamique. Une bobine de N spires de rayon a , collée à la membrane, est placée dans l'**entrefer** d'un aimant où le champ est **radial** de norme B . Chaque élément subit alors une force **axiale**, et la résultante vaut $F = BI\ell$ avec $\ell = N \times 2\pi a$: elle est **proportionnelle au courant**, et la membrane reproduit le signal.

Propriété — champ tournant et effet moteur. Deux bobines de même centre, d'axes orthogonaux, alimentées en quadrature par $I \cos(\omega t)$ et $I \sin(\omega t)$, créent $\vec{B} = B_0(\cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y)$: un champ de **norme constante** B_0 **tournant à la vitesse angulaire** ω . Une aiguille aimantée au centre subit $\Gamma_z = mB_0 \sin(\omega t - \theta)$: en régime permanent elle tourne à la **même vitesse** ω , avec un retard δ tel que $mB_0 \sin \delta = \Gamma_{\text{rés}}$ — **c'est le moteur synchrone**, qui **décroche** si $\Gamma_{\text{rés}} > mB_0$. Trois bobines à 120° en triphasé donnent un champ tournant d'amplitude $\frac{3}{2}B_0$.

► SAVOIR-FAIRE — Démonstrations exigibles et savoir-faire du chapitre

- **Démonstrations :** $\vec{F} = I\vec{A} \wedge \vec{B}$ et nullité sur un circuit fermé ; couple sur une spire rectangulaire ; équilibres et stabilité par E_p ; $\omega_0 = \sqrt{mB/J}$; $\langle \Gamma \rangle = \frac{2}{\pi} NISB$; champ tournant de norme constante ; $B_1S_1 = B_2S_2$.
- Exploiter une carte de champ (sources, zones uniformes, champ faible, comparaison d'intensités) ; tracer de mémoire celles d'un aimant droit, d'une spire, d'une bobine longue ; prévoir direction et dépendances de $\vec{B}$ par les symétries et invariances des courants ; évaluer un ordre de grandeur à partir d'une expression fournie.
- Calculer un flux (contour orienté d'abord), un moment magnétique, une force de Laplace sur une barre, un couple sur un cadre, les puissances associées ; discuter les équilibres d'un dipôle ; mener l'étude mécanique d'un rail de Laplace, d'un moteur à cadre, d'un haut-parleur, d'un champ tournant.

■ FORMULAIRE — Les relations à connaître par cœur

- $d\vec{F} = I \, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$; champ uniforme : $\vec{F} = I\vec{A} \wedge \vec{B}$, nulle pour un circuit fermé ; barre : $F = I\ell B \sin \theta$; $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ ou $\Gamma_z \omega$.
- $\vec{m} = NI\vec{S}$ ($\text{A} \cdot \text{m}^2$) ; $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$; $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$; $\Gamma_z = -dE_p/d\theta$; $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \alpha$ (Wb) ; $B_1S_1 = B_2S_2$ dans un tube de champ.
- Boussole : $\omega_0 = \sqrt{mB/J}$. Moteur à collecteur : $\langle \Gamma \rangle = \frac{2}{\pi} NISB$. Haut-parleur : $F = BI\ell$, $\ell = 2\pi aN$.
- Expressions fournies : $\mu_0 I/2\pi r$ (fil), $\mu_0 I/2R$ (centre d'une spire), $\mu_0 nI$ (bobine longue), $\mu_0 m/2\pi z^3$ (axe d'un aimant) ; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.
- Repères : $B_{\text{terrestre}} \approx 5 \times 10^{-5} \text{ T}$; aimant 0,1 à 1 T ; IRM 1 à 3 T ; $m_{\text{aimant de TP}} \approx 0,1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

✗ PIÈGES

- Confondre le champ *subi* et le champ *propre* : seul le champ extérieur intervient dans $d\vec{F} = I \, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$. Se tromper dans l'orientation de $d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$, ou oublier que la force est *nulle* si le courant est parallèle au champ.
- Croire que le couple amène $\vec{m}$ *contre* $\vec{B}$: il l'*aligne avec* ($E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ minimale). Chercher à *déplacer* un circuit fermé avec un champ uniforme : la résultante est nulle, seul le couple existe.
- Dessiner des lignes de champ *ouvertes*, comme pour un champ électrique : elles sont **fermées** et traversent l'aimant. Calculer un flux sans avoir orienté le contour, ou oublier le facteur N ; oublier l'unité de $\vec{m}$ ($\text{A} \cdot \text{m}^2$, pas T). Vouloir *calculer* $\vec{B}$ (Biot et Savart, Ampère) : **hors programme**. Parler de f.é.m. induite : c'est le chapitre 22, ici le courant est toujours *imposé*.