

Fiche de cours

Sommes et produits

Symboles $\sum$ et $\prod$, télescopage, sommes doubles, coefficients binomiaux, binôme de Newton

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

1 SOMMES ET PRODUITS D'UNE FAMILLE FINIE

Définition. Soient I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels. On note $\sum_{i \in I} a_i$ la **somme** et $\prod_{i \in I} a_i$ le **produit** de cette famille :

les a_i sont additionnés (resp. multipliés) dans un ordre quelconque, le résultat n'en dépendant pas. Par convention $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$ et $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$: la **somme vide** est nulle, le **produit vide** vaut 1 (éléments neutres de + et de $\times$).

Notation. Lorsque $I = \llbracket p; n \rrbracket$ avec $p \leq n$, on écrit $\sum_{i=p}^n a_i$ et $\prod_{i=p}^n a_i$; cette somme comporte $n - p + 1$ termes, et non $n - p$. Pour $p > n$ la famille est vide. L'indice est **muet** : $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k$, et cette lettre ne doit apparaître *nulle part* en dehors du signe $\sum$.

Propriété — règles de calcul. Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles finies de réels, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $n = \text{card}(I)$.

■ FORMULAIRE

- **Linéarité** : $\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$; en particulier $\sum_{i \in I} \lambda = n\lambda$.
- **Produits** : $\prod_{i \in I} (a_i b_i) = \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \left(\prod_{i \in I} b_i \right)$; $\prod_{i \in I} (\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i \in I} a_i$.
- **Découpage** : si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, alors $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i$. Cas usuel, pour $p \leq m < n$:

$$\sum_{i=p}^n a_i = \sum_{i=p}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i.$$
- **Changement d'indice** : si $\sigma : J \rightarrow I$ est une bijection, alors $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_{\sigma(j)}$. Les deux cas à maîtriser sont la **translation** et le **retournement** :

$$\sum_{i=p}^n a_i = \sum_{j=0}^{n-p} a_{j+p} \text{ et } \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{j=0}^n a_{n-j}.$$

✗ ATTENTION — Trois fautes qui coûtent cher

$\sum_{i \in I} a_i b_i \neq \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{i \in I} b_i \right)$ en général. On ne peut pas sortir de $\sum$ un facteur dépendant de l'indice : $\sum_{k=1}^n k a_k \neq k \sum_{k=1}^n a_k$, dont le membre de droite n'a aucun sens. Enfin, un changement d'indice modifie les bornes : la source d'erreur numéro un est le décalage de 1.

2 TÉLESCOPAGE

Théorème — somme et produit télescopiques. Soient $p \leq n$ des entiers et $(a_k)_{p \leq k \leq n+1}$ une famille de réels. Alors

$$\sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p \quad \text{et, si tous les } a_k \text{ sont non nuls,} \quad \prod_{k=p}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}.$$

Idée de preuve (exigible). Par découpage et translation d'indice, $\sum_{k=p}^n a_{k+1} = \sum_{j=p+1}^{n+1} a_j$; en retranchant $\sum_{k=p}^n a_k$, tous les termes d'indices $p+1, \dots, n$ se détruisent. On peut aussi raisonner par récurrence sur n .

Méthode — reconnaître un télescopage. pour calculer $\sum_{k=p}^n u_k$, chercher (a_k) telle que $u_k = a_{k+1} - a_k$. Trois exemples à connaître : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ donne $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$; $k \cdot k! = (k+1)! - k!$ donne $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$; et $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \cdot \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$.

3 LES SOMMES USUELLES

Théorème. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

■ FORMULAIRE

- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- **Somme arithmétique** : $\sum_{k=0}^n (a + kr) = (n+1)a + r \frac{n(n+1)}{2} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.
- **Somme géométrique** : $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$, et $\sum_{k=0}^n x^k = n+1$ si $x = 1$. Plus généralement, pour $x \neq 1$ et $p \leq n$, $\sum_{k=p}^n x^k = x^p \frac{1-x^{n-p+1}}{1-x}$.
- **Factorisation** : pour $n \geq 1$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Idées de preuve (exigibles). • **Par télescopage** : $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, donc $\sum_{k=1}^n (2k+1) = (n+1)^2 - 1$, c'est-à-dire $2 \sum_{k=1}^n k + n = n^2 + 2n$, d'où $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. De même $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ donne $\sum k^2$, et $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ donne $\sum k^3$: chaque fois, le télescopage fournit $\sum k^p$ en fonction des sommes de puissances inférieures. Une récurrence sur n convient tout aussi bien. • **Somme géométrique** : si $x \neq 1$, $(1-x) \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{j=1}^{n+1} x^j = 1 - x^{n+1}$ par télescopage ; on développe de même $(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ pour factoriser $a^n - b^n$.

✗ ATTENTION

La formule de la somme géométrique **exige** $x \neq 1$: oublier le cas $x = 1$ est la faute classique. Noter aussi que $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$ est une coïncidence remarquable, non une règle générale.

4 SOMMES DOUBLES

Théorème — interversion des sommations. Soient I et J deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels. Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right).$$

Autrement dit : on peut sommer les termes d'un tableau ligne par ligne ou colonne par colonne.

Propriété — produit de deux sommes. Pour deux familles finies $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$,

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j.$$

Les deux indices doivent porter des *noms différents* : écrire $(\sum_i a_i)(\sum_i b_i) = \sum_i a_i b_i$ est faux.

Théorème — sommes triangulaires. Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une famille finie de réels. Alors

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j},$$

et le carré d'indices se découpe en trois morceaux disjoints : $\sum_{1 \leq i,j \leq n} = \sum_{i < j} + \sum_{i=j} + \sum_{j < i}$. En particulier, pour une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

car le terme général $a_i a_j$ est symétrique en (i, j) .

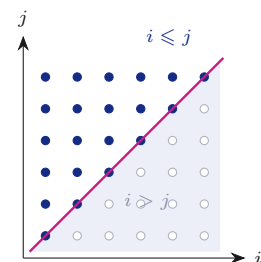


Figure 1 — Le domaine triangulaire $\{1 \leq i \leq j \leq n\}$ pour $n = 6$: sommer par colonnes (i de 1 à j) ou par lignes (j de i à n).

Méthode — traiter une somme double. dessiner le domaine d'indices, puis choisir l'ordre de sommation pour lequel la somme intérieure se calcule. Si le terme général se factorise en $a_i b_j$ et si le domaine est un rectangle $I \times J$, la somme double est un produit de deux sommes simples.

✖ ATTENTION

Dans $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j$, la borne de la somme intérieure dépend de j : il est **interdit** d'échanger les deux $\sum$ sans réécrire les bornes, et le domaine n'étant pas un rectangle, la somme ne se factorise pas.

5 FACTORIELLE ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

Définition. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n! = \prod_{k=1}^n k$, avec $0! = 1$ (produit vide). On a $(n+1)! = (n+1)n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ est défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n, \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{si } k < 0 \text{ ou } k > n.$$

Cette **convention** est essentielle : elle rend toutes les formules valables sans discussion de bornes.

Propriété. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

■ FORMULAIRE

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$;
- **symétrie** : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
- **formule du pion** : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$;
- **passage d'un terme au suivant** : $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$.

Théorème — relation de Pascal. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

ou, de façon équivalente, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Idee de preuve (exigible). Pour $1 \leq k \leq n-1$, on met au même dénominateur :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Les cas $k \leq 0$ et $k \geq n$ se vérifient directement grâce à la convention.

Remarque. Par récurrence sur n , Pascal montre que $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, ce qui n'est pas évident sur la définition par quotient de factorielles.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Figure 2 — Le triangle de Pascal : chaque coefficient est la somme des deux situés au-dessus de lui ($20 = 10 + 10$).

6 FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Théorème — binôme de Newton. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

la seconde écriture s'obtenant de la première par le changement d'indice $k \mapsto n-k$ et la symétrie des $\binom{n}{k}$.

Idée de preuve (exigible). Récurrence sur n ; pour $n = 0$ les deux membres valent 1, et si la formule vaut au rang n ,

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} :$$

en posant $j = k + 1$ dans la première somme, le coefficient de $a^j b^{n+1-j}$ est $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$ par Pascal.

Propriété — conséquences. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$, et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ dès que $n \geq 1$ (cette dernière somme vaut 1 pour $n = 0$).

✖ ATTENTION

La formule du binôme repose sur la **commutativité** de a et b : vraie dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, elle est *fausse* pour deux matrices qui ne commutent pas. Par ailleurs $(a+b)^n \neq a^n + b^n$, et $\binom{n}{k}$ n'est pas $\frac{n}{k}$.

➤ SAVOIR-FAIRE

- Manipuler les bornes : compter les termes, découper, translater et retourner un indice sans erreur de 1.
- Reconnaître et exploiter un télescopage (somme ou produit) ; décomposer une fraction en différence de deux termes consécutifs.
- Calculer une somme arithmétique, une somme géométrique (en discutant $x = 1$), $\sum k$, $\sum k^2$, $\sum k^3$, et les redémontrer.
- Intervertir les sommations d'une somme double, notamment sur un domaine triangulaire ; reconnaître un produit de deux sommes.
- Simplifier une expression de factorielles et de coefficients binomiaux ; utiliser Pascal et la formule du pion ; appliquer le binôme dans les deux sens (développer, mais aussi *reconnaître* $\sum_k \binom{n}{k} x^k$ comme $(1+x)^n$).

★ EXEMPLE — deux calculs types

Découpage. $\sum_{k=5}^{20} k = \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^4 k = 210 - 10 = 200$; contrôle : 16 termes de moyenne 12,5. *Somme triangulaire.*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ n=2: 1+1+2=4.}} i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}; \text{ contrôle en } n=2: 1+1+2=4.$$

✖ PIÈGES

- Compter $n - p$ termes dans $\sum_{k=p}^n$ au lieu de $n - p + 1$; oublier d'ajuster les bornes lors d'un changement d'indice.
- Réutiliser la lettre de l'indice muet à l'extérieur du $\sum$, ou employer le même indice dans deux $\sum$ emboîtés (*collision d'indices*).
- Sortir de $\sum_k$ un facteur dépendant de k ; écrire $\sum a_k b_k = (\sum a_k) (\sum b_k)$; appliquer $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ sans écarter le cas $x = 1$.
- Échanger deux $\sum$ emboîtés en gardant les bornes $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j$ telles quelles.
- Écrire $\binom{n}{k}$ avec k hors de $\llbracket 0; n \rrbracket$ en oubliant que la convention le rend *nul* — ou, à l'inverse, croire que $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ a un sens dans ce cas.
- Appliquer le binôme à des objets qui ne commutent pas (à retenir pour le calcul matriciel).