

Fiche de cours Polynômes et fractions rationnelles

Anneau $\mathbb{K}[X]$, arithmétique, racines et factorisation, interpolation, décomposition en éléments simples

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

1 L'ANNEAU $\mathbb{K}[X]$: DEGRÉ, INTÉGRITÉ, RACINES

Notation. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{K}[X]$, contenant $\mathbb{K}$ et un élément X appelé **indéterminée**, dont tout élément s'écrit de manière unique $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, où la famille de scalaires $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est **presque nulle** (tous nuls sauf un nombre fini). Muni des opérations usuelles, $\mathbb{K}[X]$ est un **anneau commutatif**. La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. L'unicité des coefficients est l'outil le plus utilisé du chapitre : une égalité entre polynômes équivaut à l'égalité de leurs coefficients un à un — c'est le principe d'**identification**.

Définition. Soit $P = \sum_k a_k X^k$ non nul. Le **degré** $\deg P$ est le plus grand k tel que $a_k \neq 0$, et $a_{\deg P}$ le **coefficient dominant**; P est **unitaire** lorsque ce coefficient vaut 1. La **valuation** $v(P)$ est le plus petit k tel que $a_k \neq 0$. On convient $\deg 0 = -\infty$ et $v(0) = +\infty$. Enfin $\mathbb{K}_n[X] = \{P, \deg P \leq n\}$: stable par somme et par produit par un scalaire, pas par produit.

Propriété — degré et valuation. Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $n \in \mathbb{N}$: $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, avec **égalité dès que** $\deg P \neq \deg Q$, et $v(P+Q) \geq \min(v(P), v(Q))$; $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$, $v(PQ) = v(P) + v(Q)$, $\deg(\lambda P) = \deg P$, $\deg(P^n) = n \deg P$; enfin $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$ si P et Q sont non constants, où $P \circ Q = P(Q)$.

Théorème — intégrité. $\mathbb{K}[X]$ est un anneau **intègre** : $PQ = 0 \Rightarrow P = 0$ ou $Q = 0$. Ses inversibles sont les constantes non nulles : $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^*$.

Idée de preuve (exigible). Si $P, Q \neq 0$ ont pour coefficients dominants a et b , celui de $X^{\deg P + \deg Q}$ dans PQ vaut $ab \neq 0$ ($\mathbb{K}$ est un corps) : d'où $PQ \neq 0$ et le degré d'un produit. Si $PQ = 1$, $\deg P + \deg Q = 0$ force $\deg P = \deg Q = 0$.

✖ ATTENTION

« $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$ » est **faux** sans hypothèse : pour $P = X^2 + X$ et $Q = -X^2$, $\deg(P+Q) = 1$. La convention $\deg 0 = -\infty$ n'est pas un ornement : elle rend les formules ci-dessus valables **sans exception**, y compris si un polynôme est nul.

Définition. À $P = \sum_k a_k X^k$ on associe la **fonction polynomiale** $\tilde{P} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto \sum_k a_k x^k$, notée simplement P . L'application $P \mapsto \tilde{P}$ est **injective** : un polynôme est déterminé par sa fonction polynomiale, ce qui légitime l'identification — licite ici car $\mathbb{K}$ est infini, fautive sur un corps fini. Un scalaire a est **racine** de P lorsque $P(a) = 0$.

Théorème. a est racine de $P \iff (X - a) \mid P$.

Idée de preuve (exigible). La division euclidienne par $X - a$ donne $P = (X - a)Q + R$ avec $\deg R < 1$, donc R constant; en évaluant en a , $R = P(a)$. Ainsi $P = (X - a)Q + P(a)$.

Théorème — nombre de racines. Si $P \neq 0$, le nombre de racines de P dans $\mathbb{K}$, comptées **sans multiplicité**, est majoré par $\deg P$. Donc : un polynôme de degré $\leq n$ ayant $n + 1$ racines distinctes est **nul**; un polynôme ayant une infinité de racines est nul.

Idée de preuve (exigible). Récurrence sur $\deg P$: si a est racine, $P = (X - a)Q$ avec $\deg Q = \deg P - 1$; toute racine $b \neq a$ vérifie $(b - a)Q(b) = 0$ donc $Q(b) = 0$ ($\mathbb{K}$ est intègre), et l'on applique l'hypothèse de récurrence à Q .

Méthode — schéma de Horner. pour évaluer $P = a_n X^n + \dots + a_0$ en α , calculer $b_n = a_n$ puis $b_k = b_{k+1}\alpha + a_k$: alors $b_0 = P(\alpha)$, en n additions et n multiplications seulement, et $b_n, \dots, b_1$ sont les coefficients du quotient de P par $X - \alpha$.

2 DIVISIBILITÉ, DIVISION EUCLIDIENNE

Définition. B **divise** A (noté $B \mid A$) lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. La divisibilité est transitive; si $B \mid A_1$ et $B \mid A_2$, alors $B \mid (UA_1 + VA_2)$ pour tous U, V ; si $B \mid A$ avec $A \neq 0$, alors $\deg B \leq \deg A$.

Théorème — polynômes associés. $A \mid B$ et $B \mid A \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, B = \lambda A$: on dit que A et B sont **associés**. Deux polynômes associés et unitaires sont égaux. *Preuve :* $B = AQ$ et $A = BQ'$ donnent $A = AQQ'$, donc $QQ' = 1$ par intégrité, donc $Q \in \mathbb{K}^*$.

Théorème — division euclidienne. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Q est le **quotient**, R le **reste**; de plus $B \mid A \iff R = 0$.

Idée de preuve (exigible). Existence par récurrence sur $\deg A$: si $\deg A < \deg B$, prendre $(0, A)$; sinon, avec $n = \deg A$, $m = \deg B$ et a, b les coefficients dominants, le polynôme $A - \frac{a}{b}X^{n-m}B$ est de degré $< n$ et l'hypothèse de récurrence s'applique. Unicité : $B(Q - Q') = R' - R$; si $Q \neq Q'$ le membre de gauche est de degré $\geq \deg B$, celui de droite $< \deg B$: absurde.

Méthode — division posée. disposer A et B par degrés décroissants sans omettre les monômes de coefficient nul, éliminer à chaque étape le terme dominant du dividende courant jusqu'à un degré $< \deg B$, puis contrôler en redéveloppant $BQ + R$.

3 ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{K}[X]$: LE PARALLÈLE AVEC $\mathbb{Z}$

Toute l'arithmétique du chapitre 11 se transpose : le degré remplace la valeur absolue, « unitaire » remplace « positif ».

Dans $\mathbb{Z}$	Dans $\mathbb{K}[X]$
$a = bq + r, 0 \leq r < b $	$A = BQ + R, \deg R < \deg B$
inversibles $\{-1, 1\}$; associés $\pm a$; normalisation : $a > 0$	inversibles $\mathbb{K}^*$; associés λA ; normalisation : unitaire
$a \wedge b$: plus grand diviseur commun; p premier : 2, 3, 5, ...	$A \wedge B$: diviseur commun de degré maximal; P irréductible : $X - a$ dans $\mathbb{C}[X]$, et aussi $X^2 + pX + q$ ($p^2 - 4q < 0$) dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème — pgcd. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous deux nuls. Il existe un unique polynôme **unitaire** D tel que les diviseurs communs de A et B soient exactement les diviseurs de D ; c'est le diviseur commun de degré maximal, noté $A \wedge B$. Les autres pgcd sont les $\lambda D, \lambda \in \mathbb{K}^*$. On a $A \wedge B = B \wedge A, A \wedge 0 = A$ normalisé ($A \neq 0$), $A \wedge 1 = 1, A \wedge B = (A - QB) \wedge B$ pour tout Q , et l'associativité, qui autorise $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$.

Théorème — algorithme d'Euclide. On pose $R_0 = A, R_1 = B \neq 0$ et, tant que $R_k \neq 0$, on note R_{k+1} le reste de la division euclidienne de R_{k-1} par R_k . L'algorithme s'arrête, et $A \wedge B$ est le dernier reste non nul, rendu unitaire.

Idée de preuve. Terminaison : $(\deg R_k)_{k \geq 1}$ est strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ tant que $R_k \neq 0$. Correction : $R_{k-1} \wedge R_k = R_k \wedge R_{k+1}$, donc $A \wedge B = R_N \wedge 0 = R_N$ normalisé.

Théorème — Bézout et Gauss. Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$, avec A, B non tous nuls et $D = A \wedge B$. **Relation de Bézout** : il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = D$; on l'obtient par l'**algorithme d'Euclide étendu**, en remontant les divisions pour exprimer chaque reste en fonction de A et B . On dit que A et B sont **premiers entre eux** lorsque $A \wedge B = 1$; **théorème de Bézout** : $A \wedge B = 1 \iff \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, AU + BV = 1$. **Lemme de Gauss** : si $A \mid BC$ et $A \wedge B = 1$, alors $A \mid C$.

Idées de preuve (exigibles). Bézout ($\Leftarrow$) : tout diviseur commun E divise $AU + BV = 1$, donc $\deg E = 0$. Gauss : de $AU + BV = 1$ on tire $C = ACU + (BC)V$, combinaison de deux multiples de A .

Propriété — conséquences. Si $A \mid C, B \mid C$ et $A \wedge B = 1$, alors $AB \mid C$; si $A \wedge C = 1$ et $B \wedge C = 1$, alors $(AB) \wedge C = 1$; si $D = A \wedge B, A = DA_1, B = DB_1$, alors $A_1 \wedge B_1 = 1$. Le **ppcm** $A \vee B$ (A, B non nuls) est l'unique multiple commun unitaire de degré minimal; les multiples communs sont ses multiples, et $(A \wedge B)(A \vee B)$ est associé à AB .

Définition. P est **irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ lorsque $\deg P \geq 1$ et que ses seuls diviseurs sont les constantes non nulles et les λP . Tout polynôme de degré 1 est irréductible, et tout polynôme de degré ≥ 1 s'écrit, de façon unique à l'ordre près, comme produit d'une constante et de facteurs irréductibles unitaires. L'irréductibilité **dépend du corps** : $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais vaut $(X - i)(X + i)$ dans $\mathbb{C}[X]$; et « pas de racine dans $\mathbb{K}$ » n'entraîne pas « irréductible » dès le degré 4, comme le montre $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$, sans racine réelle.

4 DÉRIVATION FORMELLE, MULTIPLICITÉ D'UNE RACINE

Définition. Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, le **polynôme dérivé** est $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$, et $P^{(0)} = P, P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$. Si $\deg P = n \geq 1$ alors $\deg P' = n - 1$; si P est constant, $P' = 0$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \tilde{P}' = (\tilde{P})'$: la dérivée formelle prolonge la dérivée usuelle.

Propriété — opérations. Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda, \mu \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{K}$ et $k \leq m$: $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$; $(PQ)' = P'Q + PQ'$; $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$; $((X - a)^m)^{(k)} = \frac{m!}{(m-k)!} (X - a)^{m-k}$; et la **formule de Leibniz**

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Théorème — formule de Taylor polynomiale. Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$:
$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$
 — une égalité de polynômes, exacte et sans reste, qui exprime P en fonction des puissances de $X-a$.

Idée de preuve. Une récurrence sur $\deg P$ permet d'écrire $P = \sum_{k=0}^n c_k (X-a)^k$; en dérivant j fois et en évaluant en a , il ne reste que $j! c_j$.

Définition. Soient $P \neq 0$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. a est racine de P de **multiplicité** m lorsque $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$, c'est-à-dire lorsque $P = (X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$: racine **simple** si $m = 1$, **double** si $m = 2$ (et multiplicité 0 si $P(a) \neq 0$).

Théorème — caractérisation par les dérivées. Pour $P \neq 0$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$:

$$a \text{ racine de multiplicité } m \iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0,$$

et $(X-a)^m \mid P \iff P(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$. De plus, si a est de multiplicité $m \geq 1$ pour P , elle est de multiplicité exactement $m-1$ pour P' . En particulier : P n'a que des racines *simples* $\iff P \wedge P' = 1$.

Idée de preuve (exigible). La formule de Taylor en a écrit P comme polynôme en $X-a$; sa valuation est le plus petit k tel que $P^{(k)}(a) \neq 0$, et c'est par définition la multiplicité de a . Les **deux** conditions sont nécessaires : sans « $P^{(m)}(a) \neq 0$ » on n'obtient que $(X-a)^m \mid P$, c'est-à-dire multiplicité $\geq m$; et $P^{(m)}(a) = 0$ signifie une multiplicité $> m$, pas $= m$.

Définition. P de degré $n \geq 1$ est **scindé** sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il est produit de facteurs de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$:

$$P = c \prod_{i=1}^r (X-a_i)^{m_i} = c \prod_{j=1}^n (X-x_j),$$

où c est le coefficient dominant, les a_i les racines distinctes de multiplicités m_i , et $x_1, \dots, x_n$ la liste des racines *comptées avec multiplicité*. Autrement dit : P est scindé $\iff$ la somme des multiplicités de ses racines dans $\mathbb{K}$ vaut $\deg P$.

Théorème — relations coefficients-racines. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de degré $n \geq 1$, scindé, de racines $x_1, \dots, x_n$ comptées avec multiplicité. En notant $\sigma_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_p}$, on a $\sigma_p = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n}$ pour $1 \leq p \leq n$; en particulier

$$\sum_{j=1}^n x_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \prod_{j=1}^n x_j = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Seules la somme et le produit sont à connaître : les autres se retrouvent en développant $a_n \prod_j (X-x_j)$. Pour $P = X^3 + pX^2 + qX + r$ scindé : $\sigma_1 = -p$, $\sigma_2 = q$, $\sigma_3 = -r$, d'où $\sum x_j^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = p^2 - 2q$.

5 POLYNÔMES SCINDÉS, FACTORISATION DANS $\mathbb{C}[X]$ ET DANS $\mathbb{R}[X]$

Théorème — théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}$ est **algébriquement clos**. La démonstration est hors programme.

Théorème — conséquences dans $\mathbb{C}[X]$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$, de coefficient dominant c . Alors P est scindé sur $\mathbb{C}$: $P = c \prod_{i=1}^r (X-a_i)^{m_i}$, les a_i distincts et $\sum_i m_i = n$, écriture unique à l'ordre près; les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1; $B \mid P$ si et seulement si chaque racine de B est racine de P avec une multiplicité au moins égale; et deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont *aucune racine commune*.

Théorème — factorisation de $X^n - 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}), \quad 1 + X + \dots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}).$$

Idée de preuve (exigible). $X^n - 1$ est unitaire de degré n et admet les n racines n -ièmes de l'unité, distinctes : il est scindé à racines simples; la seconde égalité s'obtient en divisant par $X - 1$.

Théorème — racines conjuguées. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors $\bar{a}$ est racine de P de même multiplicité que a .

Idée de preuve (exigible). Les $P^{(k)}$ sont à coefficients réels, donc $\overline{P^{(k)}(a)} = P^{(k)}(\bar{a})$; ainsi $P^{(k)}(a) = 0 \iff P^{(k)}(\bar{a}) = 0$ pour tout k , et la caractérisation par les dérivées donne l'égalité des multiplicités.

Théorème — irréductibles et factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de **discriminant strictement négatif**. Tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 1 et de coefficient dominant c s'écrit donc, de façon unique à l'ordre près,

$$P = c \prod_{i=1}^r (X-a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^s (X^2 + p_j X + q_j)^{n_j}, \quad p_j^2 - 4q_j < 0, \quad \sum_i m_i + 2 \sum_j n_j = \deg P,$$

les a_i réels distincts et les trinômes distincts. *Conséquence* : tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.

Méthode — factoriser dans $\mathbb{R}[X]$. factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis regrouper les racines conjuguées : $(X - a)(X - \bar{a}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(a)X + |a|^2$, de discriminant < 0 dès que $a \notin \mathbb{R}$.

6 INTERPOLATION DE LAGRANGE

Théorème. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$. Il existe un **unique** $L \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $L(x_i) = y_i$ pour tout i , à savoir

$$L = \sum_{i=1}^n y_i L_i, \quad L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \quad (\text{de sorte que } L_i(x_j) = \delta_{ij}),$$

et, en posant $\Pi = \prod_{j=1}^n (X - x_j)$, l'ensemble de tous les $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i est $\{L + \Pi S, S \in \mathbb{K}[X]\}$.

Idée de preuve (exigible). **Unicité** : la différence de deux solutions de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est de degré $\leq n-1$ avec n racines distinctes, donc nulle. **Existence** : les L_i sont bien définis, de degré $n-1$, et $L_i(x_j) = \delta_{ij}$. **Description** : Q convient $\iff Q - L$ s'annule en tous les $x_i \iff \Pi \mid (Q - L)$, les $X - x_j$ étant premiers entre eux deux à deux.

7 FRACTIONS RATIONNELLES ET ÉLÉMENTS SIMPLES

Définition. On admet l'existence du **corps** $\mathbb{K}(X)$ des **fractions rationnelles** : ses éléments s'écrivent $F = \frac{P}{Q}$ avec $Q \neq 0$, deux écritures $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P_1}{Q_1}$ représentant la même fraction si et seulement si $PQ_1 = P_1Q$. La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme. Toute $F \neq 0$ s'écrit de manière **unique** $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$ et Q unitaire : c'est la **forme irréductible**. On pose alors $\deg F = \deg P - \deg Q \in \mathbb{Z}$, et $\deg(FG) = \deg F + \deg G$, $\deg(F + G) \leq \max(\deg F, \deg G)$. Les **zéros** de F sont les racines de P , ses **pôles** les racines de Q , avec leurs multiplicités ; la fonction rationnelle associée est définie sur $\mathbb{K}$ privé des pôles.

Théorème — partie entière. Pour $F = \frac{P}{Q}$, la division euclidienne $P = QE + R$ donne $F = E + \frac{R}{Q}$ avec $\deg \frac{R}{Q} < 0$: E est la **partie entière** de F , l'unique polynôme tel que $\deg(F - E) < 0$, nul si et seulement si $\deg F < 0$.

Théorème — décomposition en éléments simples. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de forme irréductible $\frac{P}{Q}$, et $Q = c \prod_{i=1}^r Q_i^{m_i}$ la décomposition de Q en irréductibles unitaires distincts de $\mathbb{K}[X]$. Alors F s'écrit **de manière unique**

$$F = E + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{N_{i,k}}{Q_i^k}, \quad E \text{ la partie entière, } \deg N_{i,k} < \deg Q_i.$$

La démonstration est hors programme. Sur $\mathbb{C}$ les termes sont des $\frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k}$; sur $\mathbb{R}$ s'y ajoutent des $\frac{\alpha X + \beta}{(X^2 + pX + q)^k}$, un par facteur irréductible de degré 2 et par exposant.

Théorème — coefficient d'un pôle simple. Si a est un pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$ (forme irréductible), le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ vaut $\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} (x - a)F(x)$.

Idée de preuve (exigible). $Q = (X - a)Q_1$ avec $Q_1(a) \neq 0$, et $\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$; or $Q' = Q_1 + (X - a)Q_1'$ donne $Q'(a) = Q_1(a)$.

Méthode — calculer une décomposition en éléments simples. (1) rendre la forme irréductible et factoriser Q ; (2) extraire la partie entière si $\deg P \geq \deg Q$; (3) écrire la forme *a priori* sans oublier un terme ; (4) multiplier par $(X - a)^m$ et évaluer en a pour le coefficient de $\frac{1}{(X - a)^m}$ (pour un pôle simple, $\frac{P(a)}{Q'(a)}$) ; (5) obtenir le reste par évaluation en 0 ou 1, parité, ou limite de $xF(x)$ en $+\infty$, et contrôler en un point qui n'est pas un pôle.

Théorème — décomposition de P'/P . Si P est non constant et scindé sur $\mathbb{K}$, de racines distinctes $a_1, \dots, a_r$ de multiplicités $m_1, \dots, m_r$, alors $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{X - a_i}$: tous les pôles sont simples et les coefficients sont les multiplicités. *Preuve* : dériver $P = c \prod_i (X - a_i)^{m_i}$, puis diviser par P .

► SAVOIR-FAIRE

- Calculer un degré (somme, produit, composée), identifier des coefficients, poser une division euclidienne et un schéma de Horner.
- Dérouler l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{K}[X]$, le remonter pour un couple de Bézout, appliquer Bézout et Gauss ; déterminer la multiplicité d'une racine par les dérivées successives et montrer que toutes les racines sont simples via $P \wedge P' = 1$; factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ en utilisant $X^n - 1$ et les racines de l'unité.

- Exploiter les relations coefficients-racines ; écrire le polynôme interpolateur de Lagrange et décrire *tous* les polynômes solutions.
- Déterminer partie entière, pôles et décomposition en éléments simples d'une fraction simple ; reconnaître P'/P .

★ EXEMPLE — trois calculs types

Euclide. $X^5 - 1 = X^2(X^3 - 1) + (X^2 - 1)$, $X^3 - 1 = X(X^2 - 1) + (X - 1)$, $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$: donc $(X^5 - 1) \wedge (X^3 - 1) = X - 1$, et en remontant $(-X)(X^5 - 1) + (X^3 + 1)(X^3 - 1) = X - 1$. *Multiplicité.* Pour $P = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$: $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P'''(1) = 12 \neq 0$, donc 1 est racine *triple* et $P = (X - 1)^3(X + 1)$. *Éléments simples.* $F = \frac{X^3}{X^2 - 1} = X + \frac{X}{X^2 - 1}$ par division ; les pôles ± 1 sont simples et $\frac{P(a)}{Q'(a)} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, d'où $F = X + \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/2}{X+1}$ — contrôle en $x = 2$: $\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

✖ PIÈGES

- Confondre le polynôme X et un nombre x , ou P et sa fonction polynomiale (identification licite sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seulement).
- Écrire $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$ sans réserve ; oublier $\deg 0 = -\infty$; diviser par $B = 0$.
- Croire que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se factorise en facteurs de degré 1 sur $\mathbb{R}$; oublier les facteurs $X^2 + pX + q$ de discriminant négatif ; conclure « multiplicité m » sans vérifier $P^{(m)}(a) \neq 0$; lire $AU + BV = C$ comme « $A \wedge B = C$ » alors qu'on n'obtient que $(A \wedge B) \mid C$.
- Poser une décomposition en éléments simples sans avoir rendu la fraction irréductible, oublier la partie entière lorsque $\deg P \geq \deg Q$, ou oublier un terme $\frac{\lambda}{(X-a)^k}$ pour un pôle multiple.