

Fiche de cours Nombres réels et suites numériques

Borne supérieure, densité ; limites, limite monotone, Bolzano-Weierstrass, suites classiques

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

1 LES ENSEMBLES DE NOMBRES USUELS

Notation. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, où $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des **décimaux** et $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$ celui des **rationnels**; les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont les **irrationnels** ($\sqrt{2}$ en est un). Les constructions de ces ensembles, et en particulier celle de $\mathbb{R}$, sont hors programme : on admet l'existence de $\mathbb{R}$, corps totalement ordonné contenant $\mathbb{Q}$ et vérifiant la propriété de la borne supérieure. On pose $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (**droite achevée**), avec $-\infty < x < +\infty$ pour tout réel x .

Définition — approximations décimales. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'approximation décimale **par défaut** de x à 10^{-n} près est $d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, celle **par excès** est $d_n + 10^{-n}$; ainsi $d_n \leq x < d_n + 10^{-n}$, et (d_n) est une suite croissante de décimaux de limite x .

✗ ATTENTION

$\mathbb{R}$ n'est **pas** un corps : $+\infty$ n'est pas un nombre. Les expressions $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$ restent **indéfinies** : ces « formes indéterminées » ne sont pas des règles de calcul, mais exactement les cas où le théorème d'opérations ne s'applique pas.

2 BORNE SUPÉRIEURE, BORNE INFÉRIEURE

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Un réel M est la **borne supérieure** de A , notée $\sup A$, s'il est le **plus petit des majorants** de A : M majore A , et tout majorant M' de A vérifie $M \leq M'$. Symétriquement, $\inf A$ est le **plus grand des minorants**. Ces bornes, quand elles existent, sont uniques.

Théorème — propriété de la borne supérieure - admise. Toute partie de $\mathbb{R}$ **non vide** et **majorée** admet une borne supérieure; toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure (appliquer le premier point à $-A = \{-x, x \in A\}$: $\inf A = -\sup(-A)$).

Théorème — caractérisation de la borne supérieure. Soient $A \subset \mathbb{R}$ non vide et $M \in \mathbb{R}$. Alors

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M & (M \text{ majore } A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > M - \varepsilon & (\text{aucun réel } < M \text{ ne majore } A) \end{cases}$$

De même, $m = \inf A$ si et seulement si m minore A et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < m + \varepsilon$. Enfin, A admet un maximum si et seulement si $\sup A$ existe et appartient à A , et alors $\max A = \sup A$.

Propriété — traduction séquentielle. Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Si A est majorée, il existe une suite (a_n) d'éléments de A de limite $\sup A$; si A n'est pas majorée, il existe une suite d'éléments de A de limite $+\infty$.

Idée de preuve (exigible). Premier point : la caractérisation avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ fournit $a_n \in A$ tel que $\sup A - \frac{1}{n+1} < a_n \leq \sup A$; on conclut par encadrement. Second point : « A non majorée » s'écrit $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x > M$; on prend $M = n$.

Méthode — montrer que $M = \sup A$. deux étapes, jamais une seule : (i) M majore A ; (ii) aucun réel plus petit ne majore A — soit en exhibant pour tout $\varepsilon > 0$ un $x \in A$ avec $x > M - \varepsilon$, soit en construisant une suite d'éléments de A de limite M . Si de plus $M \in A$, conclure $M = \max A$.

✗ ATTENTION

$\sup A$ **n'appartient pas** à A en général : $\sup[0; 1[= 1 \notin [0; 1[$. On n'écrit donc jamais « $\sup A \in A$ » sans preuve, et « M majore A » n'entraîne pas « $M = \sup A$ ».

Théorème — caractérisation des intervalles. $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si $\forall (a, b) \in I^2, a \leq b \implies [a; b] \subset I$.

Définition. $A \subset \mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide rencontre A : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \implies A \cap]x; y[\neq \emptyset$. **Caractérisation séquentielle** : A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A .

Théorème. $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Idée de preuve (exigible). Soient $x < y$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-n} < y - x$. Posons $d = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \in \mathbb{D}$: de $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$ on tire $x < d \leq x + 10^{-n} < y$. Pour les irrationnels : $]x - \sqrt{2}; y - \sqrt{2}[$ contient un rationnel r , et $r + \sqrt{2} \in]x; y[$ est irrationnel (sinon $\sqrt{2} = (r + \sqrt{2}) - r \in \mathbb{Q}$).

3 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES RÉELLES

Notation. Une **suite réelle** est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, notée (u_n) . Trois **modes de définition** : *explicite* ($u_n = f(n)$), *par récurrence* (u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$, ou relation à plusieurs termes), *implicite* (u_n unique solution d'une équation dépendant de n). Une propriété est vraie **à partir d'un certain rang (apcr)** s'il existe N telle qu'elle soit vraie pour tout $n \geq N$. Enfin, (u_n) est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$; **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$; **bornée** si elle est majorée et minorée, ce qui équivaut à $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$; **croissante** si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n (**strictement** si $u_n < u_{n+1}$); **stationnaire** si elle est constante apcr.

✖ ATTENTION

L'ordre des quantificateurs est décisif : dans « $\exists M, \forall n$ », le majorant est le même pour tous les indices ; « $\forall n, \exists M, u_n \leq M$ » est vrai pour toute suite et ne dit rien. Une suite non majorée ne tend pas nécessairement vers $+\infty$: $u_n = n(1 + (-1)^n)$ n'est pas majorée et $u_{2n+1} = 0$.

4 LIMITE D'UNE SUITE RÉELLE

Définition. Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) **converge vers** ℓ , et on note $u_n \rightarrow \ell$ ou $\lim u_n = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

(u_n) **tend vers** $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$; vers $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A$. La suite est **convergente** si elle a une limite finie, **divergente** sinon (limite infinie, ou pas de limite).

Remarque. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges — ce qui ne change rien : avoir $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ apcr pour tout $\varepsilon > 0$ équivaut à l'avoir avec $<$ (appliquer l'un à $\varepsilon/2$). Le rang N dépend de ε ; on l'écrit au besoin N_ε .

Méthode — rédiger une preuve de convergence. « Soit $\varepsilon > 0$. » — majorer $|u_n - \ell|$ par une expression simple v_n de limite nulle — résoudre $v_n \leq \varepsilon$ en n — « Posons $N = \dots$ » (un entier explicite, par exemple $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$) — « Alors, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq v_n \leq \varepsilon$. » — « Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $u_n \rightarrow \ell$. »

Théorème — unicité, bornitude. Une suite réelle admet au plus une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, et toute suite convergente est bornée.

Idées de preuve (exigibles). **Unicité** : si $u_n \rightarrow \ell$ et $u_n \rightarrow \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$ réels, les deux définitions avec $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3}$ et $n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$ donnent $|\ell - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| \leq \frac{2}{3} |\ell - \ell'|$, donc $|\ell - \ell'| \leq 0$: absurde (cas mixtes analogues). **Bornitude** : $\varepsilon = 1$ donne N tel que $|u_n| \leq |\ell| + 1$ pour $n \geq N$, et $M = \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$ — maximum d'un nombre fini de réels — majore $(|u_n|)$.

Théorème — opérations. Soient $(u_n), (v_n)$ de limites $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell'$, $\lambda u_n \rightarrow \lambda \ell$, $u_n v_n \rightarrow \ell \ell'$, $|u_n| \rightarrow |\ell|$, et si $\ell' \neq 0$ alors $v_n \neq 0$ apcr et $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{\ell'}$; ces énoncés s'étendent aux limites infinies *hors des formes indéterminées*. Le produit d'une suite **bornée** et d'une suite de limite **nulle** tend vers 0 — sans hypothèse de convergence sur la suite bornée : $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$.

Théorème — comparaison. Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ réelles.

■ FORMULAIRE

- **Passage à la limite** : si $u_n \leq v_n$ apcr, $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell'$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\ell \leq \ell'$ — les limites sont supposées connues.
- **Encadrement (« gendarmes »)** : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ apcr et $v_n \rightarrow \ell, w_n \rightarrow \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors (u_n) converge et $u_n \rightarrow \ell$; variante : $|u_n - \ell| \leq w_n$ apcr et $w_n \rightarrow 0$ donnent $u_n \rightarrow \ell$.
- **Minoration / majoration** : si $v_n \leq u_n$ apcr et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$ (et symétriquement en $-\infty$). Enfin, si $u_n \rightarrow \ell > 0$, alors $u_n > 0$ apcr (définition avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$).

Les deux derniers points *démontrent l'existence* de la limite, le premier la suppose acquise. Attention : le passage à la limite **affaiblit** les inégalités strictes — $\frac{1}{n+1} > 0$ pour tout n et la limite vaut 0; de « $u_n < v_n$ » on ne tire donc que $\ell \leq \ell'$.

5 SUITES MONOTONES, SUITES ADJACENTES

Théorème — théorème de la limite monotone. Toute suite réelle monotone admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si (u_n) est croissante : lorsqu'elle est majorée, elle converge et $\lim u_n = \sup \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$; lorsqu'elle n'est pas majorée, $u_n \rightarrow +\infty$. Énoncé symétrique pour une suite décroissante (avec $\inf$ et $-\infty$).

Idée de preuve (exigible). (u_n) croissante majorée : $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majorée, donc $\ell = \sup A$ existe. Soit $\varepsilon > 0$; la caractérisation de $\sup$ fournit N tel que $u_N > \ell - \varepsilon$, et la croissance donne $\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell$ pour $n \geq N$. Non majorée : pour $A \in \mathbb{R}$ il existe N avec $u_N > A$, donc $u_n \geq u_N > A$ pour $n \geq N$.

Définition. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Théorème — suites adjacentes. Deux suites adjacentes convergent vers une même limite ℓ et, pour tout n , $u_n \leq \ell \leq v_n$ — d'où la majoration d'erreur $|\ell - u_n| \leq v_n - u_n$.

Idée de preuve (exigible). $(v_n - u_n)$ est décroissante de limite 0, donc **positive** : $u_n \leq v_n$ pour tout n . Alors (u_n) croît et est majorée par v_0 , (v_n) décroît et est minorée par u_0 : elles convergent vers ℓ et ℓ' , et $\ell' - \ell = \lim(v_n - u_n) = 0$. L'encadrement s'obtient en passant à la limite dans $u_n \leq u_p$ et $v_p \leq v_n$ ($p \geq n$). **Attention** : une suite croissante majorée converge, mais **pas vers son majorant** — $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ est majorée par 1 et tend vers $1 = \sup \{u_n\}$.

6 SUITES EXTRAITES, THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Définition. Une **suite extraite** (ou **sous-suite**) de (u_n) est une suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ **strictement croissante**; on a alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout n (récurrence immédiate).

Théorème. Si $u_n \rightarrow \ell$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite de (u_n) tend vers ℓ . Réciproque partielle : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ , alors $u_n \rightarrow \ell$.

Idées de preuve. Première : si $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq N$, alors $\varphi(n) \geq n \geq N$ pour $n \geq N$. Seconde : avec N_1, N_2 adaptés aux deux extraites, tout $n \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ est pair ou impair et convient.

Méthode — prouver qu'une suite n'a pas de limite. exhiber deux suites extraites de limites différentes : $((-1)^n)$ diverge car les indices pairs donnent 1 et les impairs -1 .

Théorème — Bolzano-Weierstrass. De toute suite réelle **bornée** on peut extraire une suite **convergente**.

Idée de preuve (exigible) : dichotomie. Soit (u_n) à valeurs dans $I_0 = [a; b]$. On construit des segments emboîtés $I_p = [a_p; b_p]$ de longueur $\frac{b-a}{2^p}$ contenant chacun u_n pour une **infinité** d'indices (on coupe I_p en deux et l'on garde une moitié contenant une infinité de termes) : (a_p) et (b_p) sont adjacentes, de limite commune ℓ . On choisit à l'étape p un indice $\varphi(p) > \varphi(p-1)$ avec $u_{\varphi(p)} \in I_p$, et $a_p \leq u_{\varphi(p)} \leq b_p$ donne $u_{\varphi(p)} \rightarrow \ell$.

✖ ATTENTION

Une suite extraite convergente ne dit **rien** de la suite : $((-1)^n)$ en possède et diverge. Bolzano-Weierstrass ne fournit qu'une **sous-suite** convergente : « bornée » n'est pas « convergente ».

7 SUITES COMPLEXES

Définition. Soient (z_n) une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$: $z_n \rightarrow \ell$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |z_n - \ell| \leq \varepsilon$ ($|\cdot|$ = module); la suite est **bornée** si $(|z_n|)$ est majorée.

Propriété. $z_n \rightarrow \ell \iff \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(\ell)$. Unicité de la limite, « convergente $\Rightarrow$ bornée » et opérations restent valables. Il n'y a en revanche ni ordre, ni monotonie, ni gendarmes dans $\mathbb{C}$: seule la majoration $|z_n - \ell| \leq w_n \rightarrow 0$ subsiste.

Théorème — Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$. De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente : on extrait une sous-suite le long de laquelle $(\operatorname{Re}(z_n))$ converge, puis, la partie imaginaire restant bornée, on extrait à nouveau — une extraite d'une extraite est une extraite.

8 SUITES CLASSIQUES

Propriété. Si $u_{n+1} = u_n + r$ alors $u_n = u_0 + nr$; si $u_{n+1} = qu_n$ alors $u_n = u_0 q^n$. Pour $q \in \mathbb{R} : q^n \rightarrow 0$ si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow +\infty$ si $q > 1$, et (q^n) n'a pas de limite si $q \leq -1$. Pour $z \in \mathbb{C} : z^n \rightarrow 0$ si $|z| < 1$, et (z^n) diverge si $|z| \geq 1$ et $z \neq 1$.

Théorème — suites arithmético-géométriques. Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = au_n + b$. L'équation $\ell = a\ell + b$ a l'unique solution $\ell = \frac{b}{1-a}$, et $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a :

$$u_n = \ell + a^n (u_0 - \ell), \quad \ell = \frac{b}{1-a} \quad (\text{convergence vers } \ell \text{ si } |a| < 1).$$

On ne mémorise pas la formule : on *cherche la solution constante* ℓ , on soustrait $\ell = a\ell + b$ de $u_{n+1} = au_n + b$, et on reconnaît une suite géométrique. (Si $a = 1$, la suite est arithmétique.)

Théorème — récurrences linéaires d'ordre 2. Soient $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites complexes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Soit $r^2 = ar + b$ l'**équation caractéristique**, de discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.

■ FORMULAIRE

- $\Delta \neq 0$: deux racines distinctes r_1, r_2 et $\mathcal{E} = \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$.
- $\Delta = 0$: racine double $r_0 = \frac{a}{2} \neq 0$ et $\mathcal{E} = \{((\lambda n + \mu)r_0^n)_n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$.
- **Cas réel avec $\Delta < 0$** : les racines sont conjuguées, $r_1 = \rho e^{i\theta}$, $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ avec $\rho > 0$, et les suites réelles de $\mathcal{E}$ sont les $(\rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)))_n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Dans tous les cas, (λ, μ) est déterminé de façon unique par u_0 et u_1 . *Exemple* : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ avec $u_0 = 1$, $u_1 = 4$; $r^2 = 5r - 6$ a pour racines 2 et 3, et $\lambda + \mu = 1$, $2\lambda + 3\mu = 4$ donnent $u_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$.

Idée de preuve (exigible), cas $\Delta \neq 0$. $(r_1^n), (r_2^n)$ et leurs combinaisons linéaires sont dans $\mathcal{E}$ (calcul direct). Réciproquement, $r_1 \neq r_2$ assure que $\lambda + \mu = u_0$, $\lambda r_1 + \mu r_2 = u_1$ a une unique solution; $v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ est dans $\mathcal{E}$ et coïncide avec (u_n) en 0 et 1, donc partout par récurrence double.

Méthode — étude de $u_{n+1} = f(u_n)$. soient $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$.

- **Intervalle stable** : montrer $f(I) \subset I$; alors $u_n \in I$ pour tout n par récurrence, et la suite est bien définie. *Toujours la première étape.*
- **Monotonie** : étudier le signe de $f(x) - x$ sur I . Si f croît sur I , (u_n) est monotone, de sens donné par celui de $u_1 - u_0$; si f décroît, $f \circ f$ croît et l'on étudie séparément (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
- **Convergence** puis **identification** : conclure par la limite monotone (la stabilité de I fournit la borne); ensuite, si $u_n \rightarrow \ell$ avec $\ell \in I$ et f continue en ℓ , passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne $\ell = f(\ell)$: ℓ est un **point fixe**.
- **Représentation graphique** : tracer $\mathcal{C}_f$ et $y = x$, puis construire les termes en « escalier » (f croît) ou en « escargot » (f décroît).

✖ ATTENTION

L'identification $\ell = f(\ell)$ **suppose la convergence déjà prouvée** — la faute la plus fréquente du chapitre : la suite $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ n'a aucun point fixe réel et tend vers $+\infty$.

► SAVOIR-FAIRE

- Déterminer sup, inf, max, min d'une partie de $\mathbb{R}$; rédiger la double étape de la caractérisation de sup.
- Démontrer une convergence *à la main* : « soit $\varepsilon > 0$, posons $N = \dots$ »; lever une forme indéterminée (terme dominant, quantité conjuguée, croissances comparées).
- Utiliser encadrement, limite monotone, suites adjacentes, Bolzano-Weierstrass; prouver une divergence par deux suites extraites; résoudre une suite arithmético-géométrique, une récurrence linéaire d'ordre 2; étudier $u_{n+1} = f(u_n)$.

★ EXEMPLE — une convergence rédigée à la main

Montrons que $u_n = \frac{3n+1}{n+2} \rightarrow 3$. Pour $n \geq 1$, $|u_n - 3| = \left| \frac{3n+1-3n-6}{n+2} \right| = \frac{5}{n+2} \leq \frac{5}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$; posons $N = \left\lfloor \frac{5}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Pour tout $n \geq N$ on a $n > \frac{5}{\varepsilon}$, donc $|u_n - 3| \leq \frac{5}{n} < \varepsilon$. Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $u_n \rightarrow 3$.

✖ PIÈGES

- Manipuler $\sup A$ comme un élément de A ; conclure « M majore A » $\Rightarrow$ « $M = \sup A$ ».
- Poser « soit ℓ la limite » avant d'avoir prouvé qu'elle existe (surtout pour $u_{n+1} = f(u_n)$); traiter $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ comme des règles de calcul; conclure à une inégalité stricte par passage à la limite.
- Croire qu'une extraite convergente entraîne la convergence de la suite; confondre « non majorée » et « de limite $+\infty$ », ou « bornée » et « convergente ».