

Fiche de cours Nombres complexes

Module, argument, exponentielle complexe, racines n -ièmes, géométrie du plan

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

1 LE CORPS $\mathbb{C}$, FORME ALGÈBRIQUE

Définition. On admet l'existence d'un **corps commutatif** $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, dont les opérations prolongent celles de $\mathbb{R}$, et d'un élément i vérifiant $i^2 = -1$, tels que tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrive de manière unique $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le réel a est la **partie réelle** $\operatorname{Re}(z)$, le réel b la **partie imaginaire** $\operatorname{Im}(z)$. La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.

Propriété. L'unicité de l'écriture donne, pour $z \in \mathbb{C}$: $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(z) = 0$. Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire : une égalité dans $\mathbb{C}$ équivaut à deux égalités dans $\mathbb{R}$.

Propriété — inverse. Pour $z = a + ib$ non nul, $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$. On passe d'un quotient à la forme algébrique en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Propriété — identités valables dans $\mathbb{C}$. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

■ FORMULAIRE

- $(z + z')^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}$ (**formule du binôme**, valable car z et z' commutent);
- $z^n - z'^n = (z - z') \sum_{k=0}^{n-1} z^k z'^{n-1-k}$ pour $n \geq 1$;
- $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ si $z \neq 1$, et $\sum_{k=0}^n z^k = n + 1$ si $z = 1$.

Notation — plan complexe. Le plan est muni d'un repère orthonormé *direct* $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Au complexe $z = a + ib$ on associe le point M de coordonnées (a, b) , appelé **image** de z ; réciproquement z est l'**affixe** de M , notée z_M . L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

✗ ATTENTION — Ce qui n'a aucun sens dans $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ n'est pas ordonné : « $z \leq z'$ », « $z > 0$ » n'ont pas de sens pour z non réel. La notation $\sqrt{z}$ est **interdite** pour $z \notin \mathbb{R}_+$: un complexe non nul a **deux** racines carrées, dont aucune n'est privilégiée.

2 CONJUGAISON ET MODULE

Définition. Le **conjugué** de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$; le **module** de z est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriété — conjugaison. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$ (avec $z \neq 0$ si $n < 0$) :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z' \neq 0), \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n, \quad \bar{\bar{z}} = z,$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z, \quad z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z.$$

Géométriquement, $z \mapsto \bar{z}$ est la réflexion d'axe $(O; \vec{u})$.

Propriété — module. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$: $|z| \geq 0$ avec $|z| = 0 \iff z = 0$; $|z|^2 = z\bar{z}$; $|zz'| = |z||z'|$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$; $|z^n| = |z|^n$; $|\bar{z}| = |z|$; $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$. Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Remarque. $|z - z_0|$ est la distance ΩM entre les points d'affixes z_0 et z : $|z - z_0| = r$ (avec $r > 0$) décrit le **cercle** de centre Ω et de rayon r , et $|z - z_0| \leq r$ le **disque fermé** correspondant.

Théorème — inégalité triangulaire. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $z = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = \lambda z$. On en déduit $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$ et, par récurrence, $|\sum_{k=1}^n z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.

Idée de preuve (exigible). $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$ car $\operatorname{Re}(w) \leq |w|$; les deux membres étant positifs, on conclut par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$. L'égalité impose $\operatorname{Re}(z\bar{z}') = |z\bar{z}'|$, i.e. $z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+$, d'où $z' = \frac{\bar{z}\bar{z}'}{|z|^2} z$ si $z \neq 0$.

3 NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1 ET TRIGONOMÉTRIE

Définition. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$: c'est le cercle trigonométrique. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Propriété. $\mathbb{U} = \{e^{it}, t \in \mathbb{R}\}$, et $e^{it} = e^{it'} \iff t \equiv t' [2\pi]$. De plus $z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$, et $\mathbb{U}$ est stable par produit et par passage à l'inverse.

Propriété. Pour $s, t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$, $\overline{e^{it}} = e^{-it} = \frac{1}{e^{it}}$, $e^{i0} = 1$, et

$$\boxed{(e^{it})^n = e^{int}} \quad (\text{formule de Moivre : } (\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt)),$$

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}}, \quad \boxed{\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}} \quad (\text{formules d'Euler}).$$

Idée de preuve (exigible). $e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$ n'est que la réécriture des formules d'addition de $\cos$ et $\sin$; Moivre s'en déduit par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$, puis par passage à l'inverse pour $n < 0$; Euler s'obtient en additionnant ou soustrayant e^{it} et e^{-it} .

✖ ATTENTION

La formule $(e^{it})^\alpha = e^{i\alpha t}$ est **fausse en général si $\alpha \notin \mathbb{Z}$** : $(e^{i\pi})^{1/2}$ n'a pas de sens. La formule de Moivre est un énoncé sur les exposants entiers.

Théorème — technique de l'angle moitié. Pour $t, p, q \in \mathbb{R}$:

■ FORMULAIRE

- $1 + e^{it} = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{it/2}$; $1 - e^{it} = -2i \sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{it/2}$;
- $e^{ip} + e^{iq} = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$; $e^{ip} - e^{iq} = 2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$.

Idée de preuve (exigible). Factoriser par l'exponentielle de l'angle moitié : $1 - e^{it} = e^{it/2} (e^{-it/2} - e^{it/2})$, puis reconnaître $-2i \sin(t/2)$ par Euler.

✖ ATTENTION

$2 \cos(t/2)$ et $2i \sin(t/2)$ ne sont pas des modules : ils peuvent être négatifs ou nuls. Pour la forme trigonométrique de $1 + e^{it}$, il faut discuter du signe de $\cos(t/2)$: $|1 + e^{it}| = 2 |\cos(t/2)|$.

Méthode — linéariser $\cos^p t \sin^q t$. remplacer $\cos t$ et $\sin t$ par les formules d'Euler, développer par le binôme, puis regrouper les termes conjugués $e^{ikt} + e^{-ikt} = 2 \cos(kt)$.

Méthode — exprimer $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$. écrire $\cos(nt) + i \sin(nt) = (\cos t + i \sin t)^n$ (Moivre), développer par le binôme, puis identifier parties réelle et imaginaire.

Théorème — sommes trigonométriques. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $t \not\equiv 0 [2\pi]$,

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = e^{int/2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cos\left(\frac{nt}{2}\right)$$

et $\sum_{k=0}^n \sin(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{nt}{2}\right)$. Si $t \equiv 0 [2\pi]$, les sommes valent respectivement $n+1$ et 0.

4 FORME TRIGONOMÉTRIQUE ET ARGUMENTS

Théorème. Tout $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$; alors $r = |z|$ est unique et θ est unique modulo 2π . Tout tel θ est un **argument** de z , on note $\arg z$ l'un d'eux, l'égalité entre arguments s'entendant modulo 2π .

✖ ATTENTION

0 n'a **pas** d'argument. Dans $re^{i\theta}$, on exige $r > 0$: $-2e^{i\pi/3}$ n'est pas une forme trigonométrique (c'est $2e^{i4\pi/3}$). Enfin $\arg z$ n'est jamais un nombre bien déterminé : toute égalité le faisant intervenir doit porter la mention $[2\pi]$.

Propriété. Pour $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi], \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi], \quad \arg(z^n) \equiv n \arg z [2\pi], \quad \arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi].$$

De plus $z \in \mathbb{R}_+^* \iff \arg z \equiv 0 [2\pi]$, $z \in \mathbb{R}^* \iff \arg z \equiv 0 [\pi]$, $z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Méthode — passage à la forme trigonométrique. calculer $r = |z|$, puis écrire $\frac{z}{r} = \cos \theta + i \sin \theta$ et lire θ sur le cercle à partir du couple $(\cos \theta, \sin \theta)$ — jamais de $\tan \theta$ seul, qui ne détermine θ que modulo π .

Théorème — transformation de $a \cos t + b \sin t$. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. En notant φ un argument de $a + ib$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a \cos t + b \sin t = A \cos(t - \varphi).$$

Idée de preuve. $a \cos t + b \sin t = \operatorname{Re}((a - ib)e^{it}) = \operatorname{Re}(Ae^{-i\varphi}e^{it}) = A \cos(t - \varphi)$.

5 ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES DANS $\mathbb{C}$

Théorème — racines carrées. Tout $Z \in \mathbb{C}^*$ admet exactement deux racines carrées, opposées l'une de l'autre.

Méthode — racines carrées sous forme algébrique. pour $Z = x + iy$, on cherche $\delta = \alpha + i\beta$ tel que $\delta^2 = Z$. Le système

$$\alpha^2 - \beta^2 = x, \quad 2\alpha\beta = y, \quad \alpha^2 + \beta^2 = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(les deux premières équations traduisent $\delta^2 = Z$, la troisième $|\delta|^2 = |Z|$) donne $\alpha^2 = \frac{|Z|+x}{2}$, $\beta^2 = \frac{|Z|-x}{2}$, et le signe de $\alpha\beta$ est celui de y .

Théorème — équation du second degré. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ dans $\mathbb{C}$. Alors

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$, ces deux racines sont confondues (racine double). Dans tous les cas $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, et

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Réciproquement, deux complexes de somme S et de produit P sont exactement les racines de $z^2 - Sz + P = 0$.

Remarque. Si a, b, c sont réels et $\Delta < 0$, alors $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ et les racines sont conjuguées.

Théorème — factorisation par une racine. Si P est une fonction polynomiale à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ et si $P(a) = 0$, alors il existe une fonction polynomiale Q de degré $n - 1$, de même coefficient dominant, telle que $P(z) = (z - a)Q(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

6 RACINES n -IÈMES

Définition. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$ est l'ensemble des **racines n -ièmes de l'unité**.

Théorème. En posant $\omega = e^{2i\pi/n}$, on a $\mathbb{U}_n = \{\omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\} = \{e^{2ik\pi/n}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$, ensemble de n éléments deux à deux distincts. Leurs images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique, l'un d'eux étant le point d'affixe 1. De plus, pour $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = 0$. *Idée de preuve (exigible).* $z^n = 1$ impose $|z| = 1$, donc $z = e^{i\theta}$, et $e^{in\theta} = 1 \iff n\theta \equiv 0 [2\pi] \iff \theta \in \frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}$; la somme est géométrique de raison $\omega \neq 1$, donc vaut $\frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$.

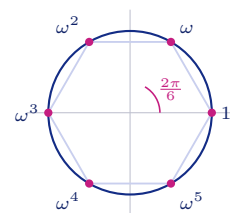


Figure 1 — Les racines sixièmes de l'unité, $\omega = e^{i\pi/3}$.

Notation. Pour $n = 3$, on note traditionnellement $j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; alors $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, $\bar{j} = j^2 = \frac{1}{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.

Théorème — racines n -ièmes d'un complexe. Soit $a = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$. L'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions : $z_k = \rho^{1/n} e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$, $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Comme $z_k = z_0 \omega^k$, on obtient toutes les solutions en multipliant une solution particulière par les racines n -ièmes de l'unité.

7 EXPONENTIELLE COMPLEXE

Définition. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = \exp(z) = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$. Cette définition prolonge à la fois l'exponentielle réelle et la notation e^{it} .

Propriété. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$: $e^z \neq 0$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, $\arg(e^z) \equiv \operatorname{Im}(z) [2\pi]$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Théorème. $e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. En particulier $e^z = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}$: $\exp$ n'est pas injective, elle est $2i\pi$ -périodique.

Méthode — résoudre $e^z = a$. si $a = 0$, pas de solution. Si $a \neq 0$, écrire $a = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$; alors, en posant $z = x + iy$, $e^x = \rho$ et $y \equiv \alpha [2\pi]$, d'où $\mathcal{S} = \{\ln \rho + i(\alpha + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$: l'exponentielle complexe est une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$.

8 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Propriété. Soient A, B, C d'affixes a, b, c , avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Alors

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB}, \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi].$$

On en déduit : A, B, C alignés $\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$; $(AB) \perp (AC) \iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$.

Théorème — application $z \mapsto az + b$. Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$.

- Si $a = 1$, f est la **translation** de vecteur d'affixe b (sans point fixe si $b \neq 0$).
- Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et $f(z) - \omega = a(z - \omega)$ pour tout z : f est la **similitude directe** de centre Ω (d'affixe ω), de rapport $|a|$, d'angle $\arg a$, composée de l'homothétie et de la rotation de centre Ω correspondantes.
- Cas particuliers : si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, f est l'**homothétie** de centre Ω et de rapport a ; si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, f est la **rotation** de centre Ω et d'angle $\arg a$.

Enfin $z \mapsto \bar{z}$ est la réflexion d'axe $(O; \vec{u})$. Toute étude générale des similitudes est hors programme.

► SAVOIR-FAIRE

- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ; déterminer un ensemble de points défini par un module ou un argument.
- Linéariser $\cos^p t \sin^q t$; exprimer $\cos(nt)$, $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$, $\sin t$; calculer $\sum \cos(kt)$ par l'angle moitié.
- Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, extraire une racine carrée sous forme algébrique, exploiter somme et produit des racines.
- Déterminer les racines n -ièmes d'un complexe, les placer, utiliser $\sum_{z \in U_n} z = 0$; résoudre $e^z = a$.
- Reconnaître la nature géométrique de $z \mapsto az + b$ et en donner les éléments caractéristiques.

★ EXEMPLE — deux calculs types

- **Linéarisation.** $\cos^4 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} (e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}) = \frac{\cos(4t)}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{3}{8}$.
- **Second degré.** Pour $z^2 - (3+i)z + (2+2i) = 0$: $\Delta = (3+i)^2 - 4(2+2i) = -2i$; une racine carrée $\delta = \alpha + i\beta$ vérifie $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, $2\alpha\beta = -2$, $\alpha^2 + \beta^2 = 2$, d'où $\delta = 1 - i$. Racines : $\frac{(3+i) \pm (1-i)}{2}$, soit 2 et $1+i$ (contrôle : somme $3+i$, produit $2+2i$).

✗ PIÈGES

- Écrire $\arg z$ comme un nombre déterminé, parler de l'argument de 0, oublier « $[2\pi]$ ».
- Écrire $\sqrt{\Delta}$ quand $\Delta \notin \mathbb{R}_+$: on dit « une racine carrée δ de Δ ». Comparer deux complexes.
- Appliquer Moivre avec un exposant non entier ; confondre $|1 + e^{it}|$ et $2 \cos(t/2)$ (le module vaut $2 |\cos(t/2)|$).
- Écrire une forme trigonométrique avec $r < 0$, ou identifier r et θ sans avoir vérifié $r > 0$.
- Oublier le cas $t \equiv 0 [2\pi]$ (division par $\sin(t/2)$) dans $\sum \cos(kt)$, ou le cas $z = 1$ dans une somme géométrique.