

Fiche de cours

Logique et raisonnement

Assertions, connecteurs, quantificateurs, modes de raisonnement, récurrence

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

1 ASSERTIONS ET CONNECTEURS LOGIQUES

Définition. Une **assertion** (ou **proposition**) est un énoncé mathématique dont on peut dire, sans ambiguïté, s'il est vrai ou s'il est faux. « $2 + 2 = 4$ » est une assertion vraie, « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » une assertion fausse. *Aucune définition formelle du vrai et du faux n'est donnée : toute étude systématique de la logique est hors programme. Les mots « assertion », « vrai », « faux » sont ici des mots du langage courant, employés avec rigueur.*

Notation. On note P, Q, R des assertions. Une assertion peut dépendre d'une ou plusieurs variables : on écrit alors $P(x)$, et l'on parle de **prédicat**. « $x^2 \geq x$ » n'a de valeur de vérité qu'une fois x fixé (et une fois précisé l'ensemble où il varie) : c'est vrai pour $x = 2$, faux pour $x = \frac{1}{2}$.

Définition. À partir de P et Q on construit :

- la **négation** de P , notée $\neg P$ ou « non P » : vraie lorsque P est fausse, fausse lorsque P est vraie ;
- la **conjonction** « P et Q » : vraie lorsque P et Q sont toutes deux vraies ;
- la **disjonction** « P ou Q » : vraie lorsque *au moins* l'une des deux est vraie.

Propriété — table de vérité. Les valeurs de vérité des assertions composées se lisent dans le tableau suivant, où V signifie « vraie » et F « fausse ».

P	Q	$\neg P$	P et Q	P ou Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Propriété — lois de De Morgan. Pour toutes assertions P et Q :

■ FORMULAIRE

- $\neg(\neg P)$ équivaut à P ;
- $\neg(P \text{ et } Q)$ équivaut à $(\neg P)$ **ou** $(\neg Q)$;
- $\neg(P \text{ ou } Q)$ équivaut à $(\neg P)$ **et** $(\neg Q)$.

Idée de preuve. On compare les deux colonnes correspondantes de la table de vérité, ligne par ligne : les quatre cas (V, V) , (V, F) , (F, V) , (F, F) donnent les mêmes valeurs.

✖ ATTENTION — Le « ou » des mathématiciens est inclusif

« P ou Q » est vraie lorsque *les deux* le sont : $x \geq 0$ ou $x \leq 0$ est vraie pour tout réel x . Le « ou » exclusif du langage courant (« fromage ou dessert ») n'est pas celui des mathématiques. Retenir l'exemple fondamental : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$, et $x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0$ et $y = 0$.

2 IMPLICATION, CONTRAPOSÉE, ÉQUIVALENCE

Définition. L'**implication** $P \implies Q$ est l'assertion « $(\neg P)$ ou Q ». Elle se lit « P implique Q », ou « si P alors Q ». On dit alors que P est une **condition suffisante** pour Q , et que Q est une **condition nécessaire** pour P .

✖ ATTENTION — Une implication de prémisses fausses est vraie

La troisième ligne de la table le dit : si P est fausse, $P \implies Q$ est vraie quelle que soit Q . Ainsi « $1 = 2 \implies 3 = 4$ » est une assertion *vraie*. Une implication n'affirme rien sur P : elle affirme seulement qu'on ne peut pas avoir P vraie et Q fausse.

Propriété. Pour toutes assertions P et Q :

■ FORMULAIRE

- la **négation** de $P \implies Q$ est « P et $\neg Q$ » ;
- la **contraposée** $(\neg Q) \implies (\neg P)$ est équivalente à $P \implies Q$;
- la **réciproque** $Q \implies P$ n'est pas équivalente à $P \implies Q$.

Idée de preuve (exigible). $P \implies Q$ est par définition « $(\neg P)$ ou Q », et $(\neg Q) \implies (\neg P)$ est « Q ou $(\neg P)$ » : c'est la même assertion, la disjonction étant symétrique. Pour la négation, $\neg((\neg P) \text{ ou } Q)$ vaut « P et $\neg Q$ » par De Morgan et double négation.

Définition. L'**équivalence** $P \iff Q$ est l'assertion « $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$ ». On dit que P est une **condition nécessaire et suffisante** pour Q , ou que P et Q sont équivalentes.

✗ ATTENTION — Trois fautes de notation

Les symboles $\implies$ et $\iff$ relient des *assertions*, jamais des nombres ni des expressions : « $x^2 - 1 \implies (x - 1)(x + 1)$ » n'a aucun sens (on écrit une égalité). Ne pas confondre la réciproque (on échange P et Q) et la contraposée (on nie et on échange). Enfin $P \implies Q$ ne se démontre jamais « en supposant Q ».

Méthode — démontrer une équivalence. deux stratégies. *Par double implication* : on démontre $P \implies Q$, puis $Q \implies P$ (c'est toujours possible, et c'est la méthode sûre). *Par équivalences successives* : on écrit une chaîne $P \iff P_1 \iff \dots \iff Q$, mais il faut alors vérifier que *chaque* étape est une équivalence — élever au carré, multiplier par une quantité de signe inconnu, composer par une fonction non injective ne sont que des implications.

3 QUANTIFICATEURS

Définition. Soient E un ensemble et $P(x)$ un prédicat portant sur $x \in E$.

- « $\forall x \in E, P(x)$ » — **quantificateur universel** — signifie : $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E ;
- « $\exists x \in E, P(x)$ » — **quantificateur existentiel** — signifie : il existe au moins un élément x de E tel que $P(x)$ soit vraie ;
- « $\exists! x \in E, P(x)$ » signifie : il existe un *unique* élément x de E tel que $P(x)$ soit vraie.

La variable x est **muette** : on peut la renommer sans changer l'assertion, et elle n'a aucun sens en dehors de la portée du quantificateur.

Notation. Si $E = \emptyset$, l'assertion « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie et « $\exists x \in E, P(x)$ » est fausse. Une assertion universelle portant sur un ensemble vide est vraie « par vacuité ».

Théorème — négation d'une assertion quantifiée. Pour tout ensemble E et tout prédicat P :

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E, \neg P(x)), \quad \neg(\exists x \in E, P(x)) \iff (\forall x \in E, \neg P(x)).$$

Méthode — nier une assertion quantifiée. on parcourt l'assertion de gauche à droite : chaque $\forall$ devient $\exists$, chaque $\exists$ devient $\forall$, les ensembles ne changent pas, et l'on nie *in fine* la conclusion. Par exemple, la négation de

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, |u_k| \leq \varepsilon \quad \text{est} \quad \exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, |u_k| > \varepsilon.$$

On n'oublie pas de nier la conclusion elle-même : la négation de $\leq$ est $>$, celle de $=$ est $\neq$.

✗ ATTENTION — L'ordre des quantificateurs change tout

« $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$ » est vraie (prendre $y = -x$, qui dépend de x), alors que « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$ » est fausse (un même y devrait convenir pour tous les x). Deux quantificateurs de même nature consécutifs commutent ; deux quantificateurs de natures différentes, jamais.

✗ ATTENTION — Les quantificateurs ne sont pas des abréviations

Le programme est explicite : « l'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu ». On écrit les symboles $\forall$ et $\exists$ lorsqu'on énonce une assertion quantifiée — par exemple pour la nier — mais une démonstration se rédige *en français* : on y écrit « soit x un réel » ou « il existe un entier n tel que... ». On n'écrit pas « f croissante $\forall x$ » au fil d'une phrase.

4 LES MODES DE RAISONNEMENT

Méthode — déduction directe. pour démontrer $P \implies Q$: on suppose P vraie (« supposons P », « soit x tel que... ») et l'on enchaîne des implications jusqu'à Q . Pour démontrer « $\forall x \in E, P(x)$ », on commence par « soit $x \in E$: x est alors fixé quelconque ».

Méthode — contraposition. pour démontrer $P \implies Q$, on démontre $(\neg Q) \implies (\neg P)$, qui lui est équivalente. À utiliser quand $\neg Q$ est une hypothèse plus maniable que P : « si n^2 est impair alors n est impair » se démontre en supposant n pair.

Méthode — raisonnement par l'absurde. pour démontrer une assertion A , on suppose $\neg A$ et l'on aboutit à une contradiction (une assertion et sa négation simultanément vraies); on conclut que A est vraie. C'est la méthode reine pour démontrer une *non-existence* (« il n'existe pas de rationnel de carré 2 »).

✖ ATTENTION — Contraposition ou absurde ?

Ce ne sont pas les mêmes raisonnements. Pour $P \implies Q$: par contraposition on part de $\neg Q$ pour arriver à $\neg P$; par l'absurde on suppose à la fois P et $\neg Q$ et l'on cherche une contradiction quelconque. L'absurde est plus souple, mais on y perd le fil : à niveau égal de difficulté, on préfère la contraposition.

Méthode — disjonction de cas. pour démontrer A , on partage la situation en cas dont on vérifie qu'ils **recouvrent** tous les possibles, et l'on démontre A dans chacun. Les cas peuvent se chevaucher; ils ne doivent rien laisser de côté. Exemples : n pair ou impair; $x \geq a$ ou $x < a$ pour lever une valeur absolue; $x = 0$ ou $x \neq 0$ avant de diviser.

Méthode — contre-exemple. pour démontrer que « $\forall x \in E, P(x)$ » est *fausse*, il suffit d'exhiber un $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse : c'est exactement la négation. *Réciproquement, un exemple ne démontre jamais une assertion universelle.*

Méthode — analyse-synthèse. pour résoudre un problème d'existence et d'unicité (« montrer qu'il existe un unique objet tel que... »). *Analyse* : on suppose le problème résolu et l'on en tire des conditions *nécessaires*, jusqu'à ne plus avoir qu'un seul candidat — ce qui démontre l'unicité. *Synthèse* : on vérifie que ce candidat convient effectivement — ce qui démontre l'existence. Les deux temps sont indispensables : l'analyse seule ne prouve pas l'existence.

Méthode — double implication, double inclusion. pour une équivalence, deux implications; pour une égalité d'ensembles, deux inclusions; pour une égalité de réels, deux inégalités. Même schéma, trois usages.

★ EXEMPLE — trois raisonnements types

- **Absurde.** Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers, $q \geq 1$, la fraction étant irréductible. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair (contraposée de « p impair $\implies p^2$ impair »). En écrivant $p = 2p'$ il vient $4p'^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2p'^2$: q est pair lui aussi. Ainsi 2 divise p et q , ce qui contredit l'irréductibilité. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- **Disjonction de cas.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$: si $x \geq y$, $|x - y| = x - y$ et le membre de droite vaut $x = \max(x, y)$; si $x < y$, $|x - y| = y - x$ et il vaut $y = \max(x, y)$. Les deux cas recouvrent $\mathbb{R}^2$.
- **Analyse-synthèse.** Toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique $f = p + i$ avec p paire et i impaire. *Analyse* : si $f = p + i$, alors $f(-x) = p(x) - i(x)$, donc nécessairement $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. *Synthèse* : ces deux fonctions sont respectivement paire et impaire, et leur somme vaut f .

5 RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Théorème — propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ — admise. Toute partie *non vide* de $\mathbb{N}$ admet un **plus petit élément**. Toute partie non vide et *majorée* de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément. *Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme : cette propriété est admise et sert de point de départ.*

Théorème — principe de récurrence. Soit $P(n)$ un prédicat portant sur $n \in \mathbb{N}$. Si

$$(i) P(0) \text{ est vraie, } \quad (ii) \forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \implies P(n+1)),$$

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration (exigible). Par l'absurde, soit $A = \{n \in \mathbb{N}, \neg P(n)\}$ et supposons $A \neq \emptyset$. Alors A admet un plus petit élément n_0 . Comme $P(0)$ est vraie, $0 \notin A$, donc $n_0 \geq 1$ et $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. Par minimalité de n_0 , $n_0 - 1 \notin A$, c'est-à-dire $P(n_0 - 1)$ est vraie; l'hypothèse (ii) appliquée à $n = n_0 - 1$ donne alors $P(n_0)$ vraie, donc $n_0 \notin A$: contradiction. Donc $A = \emptyset$.

Méthode — rédiger une récurrence. quatre temps, toujours les mêmes.

1. **Énoncer la propriété** : « pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété ... ». Elle doit dépendre de n et de rien d'autre.
2. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$ pour le premier rang utile, en calculant les deux membres séparément.
3. **Hérédité** : « soit $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ soit vraie; montrons $P(n+1)$ ». On indique où l'hypothèse de récurrence est utilisée.

4. *Conclusion* : « par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ ».

Théorème — variantes. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ un prédicat.

■ FORMULAIRE

- **Récurrence à partir de n_0** : si $P(n_0)$ et si $P(n) \implies P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.
- **Récurrence double** : si $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies et si, pour tout $n \geq n_0$, $(P(n) \text{ et } P(n+1)) \implies P(n+2)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. *Deux initialisations.*
- **Récurrence forte** : si $P(n_0)$ est vraie et si, pour tout $n \geq n_0$, $(P(k) \text{ vraie pour tout } k \in \llbracket n_0 ; n \rrbracket) \implies P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Idée de preuve. On les déduit du principe de récurrence appliqué à une propriété auxiliaire : $Q(n) = \ll P(n+n_0) \gg$ pour la première, $Q(n) = \ll P(n) \text{ et } P(n+1) \gg$ pour la récurrence double, $Q(n) = \ll P(k) \text{ est vraie pour tout } k \in \llbracket n_0 ; n \rrbracket \gg$ pour la récurrence forte.

Méthode — choisir sa récurrence. récurrence *double* lorsque u_{n+2} s'exprime à l'aide de u_{n+1} et u_n ; récurrence *forte* lorsque le passage au rang $n+1$ utilise un rang *antérieur inconnu* (décomposition d'un entier, division, algorithme glouton). Lorsque l'hérédité échoue de peu, essayer de *renforcer* la propriété : une propriété plus forte peut être plus facile à hériter.

✗ ATTENTION — Trois erreurs classiques

Écrire « supposons $P(n)$ vraie pour tout n » en guise d'hypothèse de récurrence : on suppose alors ce qu'on veut démontrer. Oublier l'initialisation : la propriété « $n(n+1)$ est impair » est *héréditaire* — si $n(n+1)$ est impair, $(n+1)(n+2) = n(n+1) + 2(n+1)$ l'est aussi — et pourtant fausse pour tout n , faute d'initialisation. Enfin, pour une récurrence double, une seule initialisation ne suffit pas.

► SAVOIR-FAIRE

- Nier une assertion quantifiée, y compris à plusieurs quantificateurs ; distinguer « pour tout ... il existe ... » et « il existe ... pour tout ... ».
- Écrire la réciproque et la contraposée d'une implication ; reconnaître une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante.
- Choisir le mode de raisonnement : direct, contraposition, absurde, disjonction de cas, contre-exemple, analyse-synthèse.
- Rédiger une récurrence simple, double, forte, en identifiant précisément la propriété $P(n)$ et le rang initial.
- Utiliser la propriété du plus petit élément de $\mathbb{N}$: non-existence de suite d'entiers strictement décroissante, descente, algorithme glouton.

✗ PIÈGES

- Employer $\forall, \exists, \implies$ comme abréviations dans une phrase rédigée : c'est explicitement exclu par le programme.
- Échanger deux quantificateurs de natures différentes ; utiliser une variable muette hors de sa portée.
- Confondre réciproque et contraposée ; confondre « condition nécessaire » et « condition suffisante ».
- Croire qu'un exemple démontre une assertion universelle, ou qu'un contre-exemple réfute une assertion existentielle.
- Nier une conjonction en ne niant qu'un seul membre ; oublier de nier la conclusion d'une assertion quantifiée.
- Oublier une initialisation, ou n'en faire qu'une pour une récurrence double ; confondre récurrence forte et récurrence simple.
- Enchaîner des « $\iff$ » sans vérifier la réversibilité de chaque étape (élévation au carré, multiplication par une quantité de signe inconnu).