

Fiche de cours

Limites et continuité

Limites quantifiées, caractérisation séquentielle, TVI, image d'un segment, théorème de la bijection

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

✖ ATTENTION — Le cadre de tout le chapitre

I désigne un **intervalle** de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, et f une fonction définie sur I (ou sur I privé d'un point) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le point a où l'on étudie une limite est soit un **élément** de I , soit une **extrémité** de I , éventuellement $\pm\infty$ si I n'est pas borné : c'est la seule condition pour que « $x \rightarrow a$ » ait un sens. *Toutes les définitions sont écrites avec des inégalités larges, comme pour les suites.*

1 LIMITE EN UN POINT : LES DÉFINITIONS QUANTIFIÉES

Définition. Soient $a \in I$ ou a extrémité de I , et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers ℓ en a** , et l'on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Notation. Les autres cas s'obtiennent en remplaçant « $|x - a| \leq \delta$ » et « $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ » par la condition correspondante :

« x est proche de a »	« $f(x)$ est proche de ℓ »
$a \in \mathbb{R} \quad x - a \leq \delta \ (\delta > 0)$	
$a = +\infty \quad x \geq B \ (B \in \mathbb{R})$	
$a = -\infty \quad x \leq B \ (B \in \mathbb{R})$	
$\ell \in \mathbb{R} \quad f(x) - \ell \leq \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$	
$\ell = +\infty \quad f(x) \geq A \ (A \in \mathbb{R})$	
$\ell = -\infty \quad f(x) \leq A \ (A \in \mathbb{R})$	

Le quantificateur portant sur ε (ou A) vient *toujours en premier* : δ (ou B) **dépend** de ε . Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ s'écrit $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq B \implies f(x) \geq A$.

Définition — limites à droite, à gauche. Si a n'est pas l'extrémité droite de I , la **limite à droite** de f en a est la limite en a de la restriction de f à $I \cap]a; +\infty[$; on la note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $f(a^+)$. Définition symétrique à gauche. Dans ces limites, la valeur $f(a)$ n'intervient pas.

Propriété. Soient a intérieur à I et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f n'est pas définie en a : $\lim_{x \rightarrow a} f = \ell \iff f(a^-) = f(a^+) = \ell$. Si f est définie en a : $\lim_{x \rightarrow a} f = \ell \iff f(a^-) = f(a^+) = \ell = f(a)$.

Théorème — unicité, valeur en a , bornitude locale. (i) Si f admet une limite en a dans $\overline{\mathbb{R}}$, cette limite est **unique**. (ii) Si f est **définie** en a et admet une limite ℓ en a , alors $\ell = f(a)$ (prendre $x = a$ dans la définition). (iii) Si f admet une limite **finie** en a , alors f est **bornée au voisinage de a** : il existe $\delta > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$ avec $|x - a| \leq \delta$.

Idée de preuve. (i) Si $\ell \neq \ell'$ sont finies, appliquer les deux définitions avec $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3}$ et $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$: pour un x de I tel que $|x - a| \leq \delta$ (il en existe, car a est adhérent à I), $|\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| \leq \frac{2}{3} |\ell - \ell'|$: absurde. (iii) Prendre $\varepsilon = 1$: $|f(x)| \leq |\ell| + 1$ sur le voisinage obtenu.

✖ ATTENTION

La quantité δ dépend de ε et de a . Une fonction peut être bornée au voisinage de chaque point sans être bornée sur I : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; 1[$.

Méthode — prouver une limite « à la main ». « Soit $\varepsilon > 0$. » — majorer $|f(x) - \ell|$ par une expression simple de $|x - a|$, quitte à se restreindre d'abord à un voisinage de a (par exemple $|x - a| \leq 1$) pour contrôler les facteurs parasites — « Posons $\delta = \dots$ » (explicite, en fonction de ε) — vérifier l'implication — « Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $f(x) \rightarrow \ell$. »

2 CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE

Théorème — caractérisation séquentielle de la limite. Soient a adhérent à I et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \left(\text{pour toute suite } (x_n) \text{ d'éléments de } I \text{ telle que } x_n \rightarrow a, \text{ on a } f(x_n) \rightarrow \ell \right).$$

Idée de preuve (exigible). $\Rightarrow$: soit $\varepsilon > 0$; δ associé, puis N tel que $|x_n - a| \leq \delta$ pour $n \geq N$; alors $|f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. $\Leftarrow$: par contraposée. Si f ne tend pas vers ℓ , il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, un x de I vérifie $|x - a| \leq \delta$ et $|f(x) - \ell| > \varepsilon_0$; en prenant $\delta = \frac{1}{n+1}$ on construit (x_n) de limite a avec $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon_0$, donc $f(x_n) \not\rightarrow \ell$.

Méthode — montrer qu'une fonction n'a pas de limite en a . exhiber **deux** suites (x_n) et (y_n) de limite a telles que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ aient des limites différentes — ou une seule suite $(x_n) \rightarrow a$ telle que $(f(x_n))$ n'ait pas de limite.

✗ ATTENTION

Le sens $\Leftarrow$ exige toutes les suites. Une seule suite ne prouve jamais l'existence d'une limite : pour $f = \cos$ et $x_n = 2n\pi$, $f(x_n) \rightarrow 1$, et pourtant $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$ (prendre $y_n = (2n+1)\pi$).

3 OPÉRATIONS, COMPOSITION, COMPARAISON

Théorème — opérations. Soient f, g de limites $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ en a et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, en a : $\lambda f + \mu g \rightarrow \lambda \ell + \mu \ell'$, $fg \rightarrow \ell \ell'$, $|f| \rightarrow |\ell|$, et si $\ell' \neq 0$ alors g ne s'annule pas au voisinage de a et $\frac{f}{g} \rightarrow \frac{\ell}{\ell'}$. Ces énoncés s'étendent aux limites infinies **hors des formes indéterminées** $\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$. Enfin, le produit d'une fonction **bornée au voisinage de a** et d'une fonction de limite **nulle** en a tend vers 0.

Théorème — composition. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$, et $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ et $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} c$, alors $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$.

Théorème — comparaison. Au voisinage de a :

■ FORMULAIRE

- **Passage à la limite** : si $f \leq g$ au voisinage de a et si $f \rightarrow \ell, g \rightarrow \ell'$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\ell \leq \ell'$ — les limites sont supposées connues.
- **Encadrement** : si $g \leq f \leq h$ au voisinage de a avec $g \rightarrow \ell$ et $h \rightarrow \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$), alors f admet une limite en a et $f \rightarrow \ell$. Variante commode : $|f - \ell| \leq h$ au voisinage de a avec $h \rightarrow 0$.
- **Minoration / majoration** : si $g \leq f$ au voisinage de a et $g \rightarrow +\infty$, alors $f \rightarrow +\infty$ (et symétriquement).

Les deux derniers points *démontrent* l'existence de la limite, le premier la suppose acquise; et le passage à la limite **affaiblit** les inégalités strictes.

✗ ATTENTION

Le théorème de composition exige que g **admette une limite en b** : ce n'est pas automatique, et l'écriture $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f)$ n'est légitime que si g est *continue* en b . Contre-exemple : $f(x) = x^2 \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 1$, mais $g = \lfloor \cdot \rfloor$ n'a pas de limite en 1, et $\lfloor x^2 \rfloor$ n'en a pas non plus (0 à gauche, 1 à droite).

4 CONTINUITÉ EN UN POINT

Définition. Soit $a \in I$. f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

f est continue à droite (resp. à gauche) en a si $f(a^+) = f(a)$ (resp. $f(a^-) = f(a)$); si a est intérieur à I , f est continue en a si et seulement si elle l'est à droite et à gauche. f est **continue sur I** si elle est continue en tout point de I ; on note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Propriété — caractérisation séquentielle. f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I de limite a , $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Propriété — opérations. Une combinaison linéaire, un produit, un quotient (là où le dénominateur ne s'annule pas) et une composée de fonctions continues sont continues. Les fonctions usuelles (polynomiales, rationnelles, $\exp$, $\ln$, x^α , $\cos$, $\sin$, $\tan$, $|\cdot|$, $\sqrt{\cdot}$, Arcsin , Arccos , Arctan , ch , sh , th) sont continues sur leur ensemble de définition.

Théorème — prolongement par continuité. Soient $a \notin I$ une extrémité finie de I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet une limite finie ℓ en a , alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur $I \cup \{a\}$ par $\tilde{f} = f$ sur I et $\tilde{f}(a) = \ell$ est continue en a : c'est le **prolongement par continuité** de f en a , et il est unique.

✖ ATTENTION

On ne prolonge **jamais** par continuité en un point où la limite est infinie ou n'existe pas : $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ ne se prolongent pas en 0. Et la limite doit être calculée, non devinée : « f se prolonge en posant $f(a) = 0$ » n'est licite qu'après avoir prouvé $f(x) \rightarrow 0$.

Méthode — étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux. sur chaque morceau ouvert, invoquer les opérations sur les fonctions usuelles ; aux points de raccord a , calculer $f(a^-)$, $f(a^+)$ et $f(a)$, et conclure par l'égalité (ou non) des trois.

5 FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

Théorème — théorème des valeurs intermédiaires. Soient f continue sur $[a; b]$ ($a < b$) et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$. En particulier, si $f(a)f(b) \leq 0$, f s'annule sur $[a; b]$.

Idée de preuve (exigible) : dichotomie. Supposons $f(a) \leq y \leq f(b)$ et posons $a_0 = a$, $b_0 = b$. Connaissant $a_n \leq b_n$ avec $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$, on note $m = \frac{a_n + b_n}{2}$ et l'on garde $[a_n; m]$ si $f(m) \geq y$, $[m; b_n]$ sinon. Les suites (a_n) et (b_n) sont **adjacentes** ($b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$), de limite commune $c \in [a; b]$. La continuité de f en c donne $f(a_n) \rightarrow f(c)$ et $f(b_n) \rightarrow f(c)$; le passage à la limite dans $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$ donne $f(c) \leq y \leq f(c)$, donc $f(c) = y$.

Théorème — image d'un intervalle. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. *Corollaire* : si f est continue et **strictement croissante** sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$; si f est continue et **strictement croissante** sur $]a; b[$, alors $f(]a; b[) =]\lim_{a+} f; \lim_{b-} f[$ (énoncés symétriques pour une fonction décroissante).

Théorème — théorème des bornes atteintes. Soit f continue sur un **segment** $[a; b]$. Alors f est **bornée** et **atteint ses bornes** : il existe $x_1, x_2 \in [a; b]$ tels que $f(x_1) = \inf f$ et $f(x_2) = \sup f$. Autrement dit $\min f$ et $\max f$ existent.

Idée de preuve (exigible) : Bolzano-Weierstrass. Montrons que f est majorée : sinon, pour tout n il existe $x_n \in [a; b]$ avec $f(x_n) \geq n$; la suite (x_n) est bornée, donc possède une extraite $(x_{\varphi(n)})$ de limite $c \in [a; b]$, et la continuité en c donne $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(c)$ — or cette suite tend vers $+\infty$: absurde. Posons alors $M = \sup f$, fini. Il existe une suite (y_n) de $[a; b]$ telle que $f(y_n) \rightarrow M$ (caractérisation séquentielle du sup) ; une extraite converge vers un $x_2 \in [a; b]$, et la continuité donne $f(x_2) = M$. Même travail pour l'inf.

Théorème — image d'un segment. L'image d'un **segment** par une fonction continue est un **segment** : si f est continue sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [m; M]$ avec $m = \min f$ et $M = \max f$.

Idée de preuve (exigible). $f([a; b])$ est un intervalle (image d'un intervalle), contenu dans $[m; M]$ et contenant m et M (bornes atteintes) : c'est donc exactement $[m; M]$.

✖ ATTENTION

Les trois hypothèses du théorème des bornes atteintes sont indispensables. **Segment fermé** : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; 1[$ et non bornée. **Segment borné** : $x \mapsto x$ sur $[0; +\infty[$. **Continuité** : $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; 1[$ n'est pas bornée. Enfin $f([a; b])$ n'est **pas** $[f(a); f(b)]$ en général : pour $f = \cos$ sur $[0; 2\pi]$, $f(a) = f(b) = 1$ et $f([0; 2\pi]) = [-1; 1]$.

6 MONOTONIE, INJECTIVITÉ, THÉORÈME DE LA BIJECTION

Théorème — démonstration non exigible. Une fonction continue et **injective** sur un intervalle I est **strictement monotone** sur I .

Théorème — théorème de la bijection. Soit f continue et **strictement monotone** sur un intervalle I . Alors :

- $J = f(I)$ est un intervalle, et f réalise une **bijection** de I sur J ;
- la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est **continue** sur J et **strictement monotone de même sens** que f ;
- les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La démonstration de la continuité de f^{-1} n'est pas exigible. Les bornes de J se lisent sur les limites de f aux bornes de I .

Méthode — résoudre « l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution ». deux temps, jamais un seul. **Existence** : TVI (continuité sur un segment, ou image d'un intervalle avec les limites aux bornes). **Unicité** : stricte monotonie (souvent par le signe de f' , chapitre 6). On conclut alors « il existe un unique c tel que... », et l'on peut encadrer c par dichotomie.

✖ ATTENTION

Sans stricte monotonie, le TVI ne donne **aucune** unicité : on dit « une solution », jamais « la solution ». Et sans continuité, il ne donne rien du tout : $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $[0; 2]$ ne prend jamais la valeur $\frac{1}{2}$ bien que $\lfloor 0 \rfloor = 0$ et $\lfloor 2 \rfloor = 2$.

7 FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. Pour $\ell \in \mathbb{C}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ signifie $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ (module). f est continue en a si $f(x) \rightarrow f(a)$.

Propriété. $\lim_{x \rightarrow a} f = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \ell$; de même, f est continue en a si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. Unicité de la limite, caractérisation séquentielle et opérations (somme, produit, quotient, composition avec une fonction réelle) restent valables. En revanche, il n'y a dans $\mathbb{C}$ ni ordre, ni TVI, ni bornes atteintes : seules subsistent les majorations de module, et le fait que $|f|$ est continue si f l'est.

➤ SAVOIR-FAIRE

- Écrire et utiliser une définition quantifiée de limite ; produire un δ explicite en fonction de ε ; nier une définition de limite.
- Calculer une limite (opérations, composition, quantité conjuguée, croissances comparées, taux d'accroissement) ; prouver une non-existence par la caractérisation séquentielle.
- Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux ; prolonger par continuité.
- Appliquer le TVI (existence) et la stricte monotonie (unicité) ; déterminer $f(I)$; utiliser le théorème des bornes atteintes ; énoncer et appliquer le théorème de la bijection.

★ EXEMPLE — trois rédactions types

- **Un δ explicite.** Montrons $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$. Pour $|x - 3| \leq 1$ on a $2 \leq x \leq 4$, donc $|x + 3| \leq 7$ et $|x^2 - 9| = |x - 3| |x + 3| \leq 7 |x - 3|$. Soit $\varepsilon > 0$; posons $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{7}) > 0$. Si $|x - 3| \leq \delta$, alors $|x^2 - 9| \leq 7\delta \leq \varepsilon$. Donc $x^2 \rightarrow 9$.
- **Une non-existence.** $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0^+ : avec $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, on a $x_n \rightarrow 0^+$, $y_n \rightarrow 0^+$, $f(x_n) = 0 \rightarrow 0$ et $f(y_n) = 1 \rightarrow 1$: deux limites distinctes.
- **Existence et unicité.** $g(x) = x^3 + x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynomiale) et strictement croissante ($g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$). Comme $g(0) = -1 < 0 < 1 = g(1)$, le TVI donne une racine dans $]0; 1[$, et la stricte croissance l'unicité : g a une unique racine réelle c , et $c \in]0; 1[$.

✖ PIÈGES

- Inverser l'ordre des quantificateurs, ou choisir δ avant ε ; oublier « $x \in I$ » dans la définition.
- Conclure de $f(x_n) \rightarrow \ell$ pour une suite que $\lim_a f = \ell$; confondre limite et limites à droite/à gauche.
- Prolonger par continuité en un point de limite infinie ; écrire $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$ sans monotonie.
- Appliquer le TVI sans continuité, ou en déduire l'unicité ; chercher un maximum sur un intervalle qui n'est pas un segment.
- Dire « f est continue donc bijective », ou oublier la stricte monotonie dans le théorème de la bijection.