

Fiche de cours Inégalités et trigonométrie

Ordre sur $\mathbb{R}$, valeur absolue, parties bornées, partie entière, trigonométrie circulaire, pivot

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

1 L'ORDRE SUR $\mathbb{R}$ ET LES INÉGALITÉS

Définition. On munit $\mathbb{R}$ de la relation $\leq$ définie par $x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$: c'est une relation d'**ordre total** (réflexive, antisymétrique, transitive, et deux réels sont toujours comparables).

Propriété — compatibilité avec les opérations. Soient x, y, z, t des réels et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $x \leq y \iff x + z \leq y + z$: on peut *toujours* ajouter un réel aux deux membres ;
- si $\lambda \geq 0$: $x \leq y \implies \lambda x \leq \lambda y$; si $\lambda \leq 0$: $x \leq y \implies \lambda x \geq \lambda y$ (l'inégalité **change de sens**) ;
- $x \leq y$ et $z \leq t \implies x + z \leq y + t$: on **additionne** deux inégalités de même sens ; mais $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t \implies xz \leq yt$: on ne les **multiplie** qu'entre réels positifs ;
- si x et y sont de même signe et non nuls : $x \leq y \iff \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$; et pour $x, y \geq 0$: $x \leq y \iff x^2 \leq y^2 \iff \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \iff x^n \leq y^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

✖ ATTENTION — Les trois fautes qui coûtent le plus cher

On ne multiplie **jamais** une inégalité par une quantité de signe inconnu ; on ne passe aux inverses qu'entre réels de *même* signe non nuls ; on ne **soustrait pas** deux inégalités de même sens (de $1 \leq 2$ et $0 \leq 10$ on ne tire rien sur $1 - 0$ et $2 - 10$) ; et $x^2 \leq y^2$ n'entraîne $x \leq y$ que si $x, y \geq 0$ ($3^2 \leq (-4)^2$ mais $3 \not\leq -4$).

Notation — intervalles. Pour $a \leq b$: $[a; b]$, $[a; b[$, $]a; b]$, $]a; b[$, et les intervalles non bornés $[a; +\infty[$, $]-\infty; b]$... On note $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$, $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$, et $\llbracket a; b \rrbracket = [a; b] \cap \mathbb{Z}$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$. Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies [x; y] \subset I$.

Méthode — résoudre une inéquation. tout ramener à la forme $A(x) \leq 0$ (ou < 0), **factoriser**, puis dresser un **tableau de signes** sur le domaine de définition. Pour une inéquation avec dénominateur, on ne multiplie pas par ce dénominateur : on réduit au même dénominateur et on étudie le signe du quotient.

Propriété — majorations et minorations. Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$: $a + c \leq x + y \leq b + d$ et $a - d \leq x - y \leq b - c$ (on encadre $-y$ avant d'ajouter). Pour un quotient, si de plus $0 \leq a$ et $0 < c$: $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$.

2 VALEUR ABSOLUE ET INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Définition. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, et $|x| = \sqrt{x^2}$. Le réel $|x - y|$ est la **distance** de x à y .

Propriété. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \iff x = 0$; $|xy| = |x||y|$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ($y \neq 0$) ; $|x^n| = |x|^n$; $-|x| \leq x \leq |x|$.

Propriété — lecture sur la droite réelle. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$. Alors

$$|x| \leq b \iff -b \leq x \leq b, \quad |x| \geq b \iff (x \leq -b \text{ ou } x \geq b), \quad |x - a| \leq b \iff x \in [a - b; a + b]$$

c'est-à-dire : les réels dont la distance à a est au plus b sont ceux de l'intervalle de centre a et de rayon b .

Théorème — inégalité triangulaire. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \text{avec égalité si et seulement si } xy \geq 0 \text{ (} x \text{ et } y \text{ de même signe)}.$$

On en déduit $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$ et, par récurrence, $\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$.

Idée de preuve (exigible). $|x + y|^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq (|x| + |y|)^2$ car $xy \leq |xy| = |x||y|$; les deux membres étant positifs, on conclut par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$, l'égalité imposant $xy = |xy|$. Pour la variante : $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, puis on échange x et y .

Méthode — maximum et minimum de deux réels. $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ et $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$: une valeur absolue permet de se débarrasser d'une disjonction de cas.

3 PARTIES MAJORÉES, MINORÉES, BORNÉES ; PARTIE ENTIÈRE

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Un réel M est un **majorant** de A si $\forall x \in A, x \leq M$; un réel m est un **minorant** si $\forall x \in A, m \leq x$. La partie A est **majorée** (resp. **minorée**) si elle admet un majorant (resp. un minorant), et **bornée** si elle est les deux ; A est bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq M$. Enfin α est le **maximum** de A , noté $\max A$, si $\alpha \in A$ et α majore A (définition analogue pour $\min A$) ; lorsqu'il existe, il est unique par antisymétrie de $\leq$.

✖ ATTENTION

Un majorant n'a aucune raison d'appartenir à A : 1 majore $A = [0; 1[$, mais A **n'a pas de maximum** (si $\alpha \in A$, alors $\frac{\alpha+1}{2} \in A$ et $\alpha < \frac{\alpha+1}{2}$) : « majorée » et « admet un maximum » sont deux énoncés *différents*. La *borne supérieure* $\sup A$ est introduite au chapitre 8 et n'est pas utilisée ici.

Théorème — partie entière. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. Cet entier est la **partie entière** de x , notée $\lfloor x \rfloor$.

Idée de preuve. Pour $x \geq 0$, la partie $\{k \in \mathbb{N}, k > x\}$ de $\mathbb{N}$ est non vide ($\mathbb{N}$ n'est pas majoré) : elle admet un plus petit élément p (chapitre 1) et $n = p - 1$ convient. L'unicité vient de ce que deux entiers distincts diffèrent d'au moins 1 ; le cas $x < 0$ s'en déduit.

Propriété — caractérisation et règles de calcul. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

- $n = \lfloor x \rfloor \iff n \leq x < n + 1 \iff x - 1 < n \leq x$: pour identifier une partie entière, on encadre ;
- $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x, 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ (**partie fractionnaire**) ;
- $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ pour $n \in \mathbb{Z}$; $\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$; $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante ;
- pour $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, le nombre de multiples de d appartenant à $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ est $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$.

✖ ATTENTION

La partie entière n'est **pas** la troncature : $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$ mais $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$ (car $-3 \leq -2,7 < -2$). De même $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ en général ($x = y = \frac{1}{2}$) et $\lfloor -x \rfloor \neq -\lfloor x \rfloor$ dès que $x \notin \mathbb{Z}$.

4 LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Notation — congruence modulo 2π . Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on écrit $a \equiv b [\alpha]$ lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k\alpha$. C'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ (chapitre 2).

Définition. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{C}$ désigne le cercle de centre O et de rayon 1, dit **cercle trigonométrique**. À $t \in \mathbb{R}$ on associe l'unique point $M(t)$ de $\mathcal{C}$ obtenu en parcourant $\mathcal{C}$ depuis le point $(1; 0)$ d'une longueur $|t|$, dans le sens direct si $t \geq 0$, indirect sinon. Les coordonnées de $M(t)$ sont $(\cos t; \sin t)$.

Propriété. Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$; $-1 \leq \cos t \leq 1$ et $-1 \leq \sin t \leq 1$; $\cos$ est paire, $\sin$ impaire, toutes deux 2π -périodiques ; et

$$M(s) = M(t) \iff s \equiv t [2\pi] \iff (\cos s = \cos t \text{ et } \sin s = \sin t).$$

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\tan t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	0

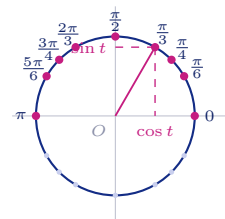


Figure 1 — Le cercle trigonométrique.

Propriété — angles associés. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(-x) = \cos x$, $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$, $\sin(-x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$. On les retrouve sur le cercle par symétrie, jamais par cœur.

5 FORMULES D'ADDITION, DE DUPLICATION, LINÉARISATION

Théorème — formules d'addition et de duplication. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

■ FORMULAIRE

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, & \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b, \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b, & \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b. \\ \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a, & \sin(2a) &= 2\sin a \cos a, \\ \cos^2 a &= \frac{1 + \cos(2a)}{2}, & \sin^2 a &= \frac{1 - \cos(2a)}{2} \quad (\text{duplication et angle moitié}).\end{aligned}$$

Justification géométrique de $\cos(a-b)$ (exigible). Les vecteurs $\vec{w}_1 = (\cos a, \sin a)$ et $\vec{w}_2 = (\cos b, \sin b)$ sont unitaires et l'angle orienté de $\vec{w}_2$ vers $\vec{w}_1$ vaut $a-b$: le produit scalaire, calculé en coordonnées puis sous sa forme $\|\vec{w}_1\| \|\vec{w}_2\| \cos(a-b)$, donne $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$. Les trois autres s'en déduisent en changeant b en $-b$ et en utilisant $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

Propriété — linéarisation et factorisation. Pour tous $a, b, p, q \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)), & \sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)), & \sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)), \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, & \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.\end{aligned}$$

Idée de preuve (exigible). Les trois premières s'obtiennent en ajoutant ou soustrayant les formules d'addition pour $a+b$ et $a-b$; les trois dernières en posant $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, de sorte que $p = a+b$ et $q = a-b$.

Théorème — transformation de $a \cos t + b \sin t$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $A = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. Comme $(\frac{a}{A})^2 + (\frac{b}{A})^2 = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π , tel que $\cos \varphi = \frac{a}{A}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{A}$; alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a \cos t + b \sin t = A \cos(t - \varphi).$$

En particulier $a \cos t + b \sin t$ prend toutes les valeurs de $[-A; A]$ et aucune autre.

Théorème. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$, avec égalité si et seulement si $x = 0$; en particulier $0 \leq \sin x \leq x$ pour $x \geq 0$. *Preuve admise à ce stade* : pour $|x| \leq \pi$ on compare, dans le cercle, la longueur de l'arc ($|x|$) à celle de la corde ($2|\sin \frac{x}{2}|$, donc $|\sin x| \leq |x|$) ; pour $|x| > \pi$, $|\sin x| \leq 1 < \pi < |x|$.

6 LA FONCTION TANGENTE

Définition. Pour $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, on pose $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. La fonction $\tan$ est impaire et π -périodique ; $\tan x = 0 \iff x \equiv 0 [\pi]$.

Propriété. Pour x, a, b dans le domaine (et sous réserve que les quantités écrites existent) :

$$\begin{aligned}1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}, & \tan(\pi + x) &= \tan x, & \tan(\pi - x) &= -\tan x, \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{\tan x}, & \tan(a \pm b) &= \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}.\end{aligned}$$

Propriété. Sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\tan$ est strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$; elle réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée, $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, est établie au chapitre 6.

Théorème — expression par $u = \tan \frac{t}{2}$. Soit $t \neq \pi[2\pi]$ et $u = \tan \frac{t}{2}$. Alors

$$\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \sin t = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad \tan t = \frac{2u}{1 - u^2} \quad (t \neq \frac{\pi}{2} [\pi]).$$

Idée de preuve (exigible). $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \cos^2 \frac{t}{2} (1 - u^2)$ et $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \cos^2 \frac{t}{2} \times 2u$; on conclut avec $\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{1+u^2}$.

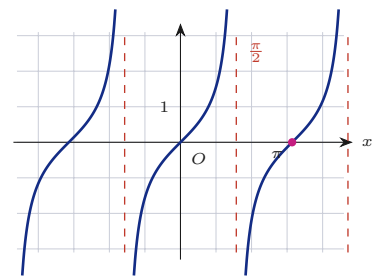


Figure 2 — La fonction $\tan$, de période π .

7 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Théorème. Soient $x, a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos x = \cos a \iff (x \equiv a [2\pi] \text{ ou } x \equiv -a [2\pi]),$$

$$\sin x = \sin a \iff (x \equiv a [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - a [2\pi]),$$

$$\tan x = \tan a \iff x \equiv a [\pi] \quad (\text{pour } x \text{ et } a \text{ hors de } \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}).$$

Méthode — résoudre une équation trigonométrique. se ramener à l'une des trois formes ci-dessus (en factorisant, en posant $X = \cos x$, ou par $a \cos t + b \sin t = A \cos(t - \varphi)$), puis écrire toutes les familles de solutions avec leur modulo; pour restreindre à un intervalle, faire varier $k \in \mathbb{Z}$ et ne garder que les valeurs qui y tombent.

Méthode — exemple. $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$: en posant $X = \cos x$, $2X^2 - 3X + 1 = 0$ donne $X = 1$ ou $X = \frac{1}{2}$, d'où $x \equiv 0 [2\pi]$ ou $x \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$; une racine $X > 1$ aurait été à rejeter car $|\cos x| \leq 1$.

Méthode — résoudre une inéquation trigonométrique. placer sur le cercle les solutions de l'équation associée, puis lire l'arc sur lequel l'inégalité est vraie; on obtient un intervalle « modulo 2π », par exemple

$$\cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi], \quad \sin x > \frac{1}{2} \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi[.$$

8 PETITS SYSTÈMES LINÉAIRES ET MÉTHODE DU PIVOT

Définition. Un **système linéaire** de n équations à p inconnues réelles ($n, p \in \{2, 3\}$) s'écrit $(S) : \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j = b_i$. Le système est **homogène** si tous les b_i sont nuls. Résoudre (S) , c'est décrire l'ensemble de ses solutions $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.

Propriété — opérations élémentaires. Les trois opérations suivantes sur les lignes ne modifient pas l'ensemble des solutions :

$$L_i \leftrightarrow L_j \text{ (échange)}, \quad L_i \leftarrow \lambda L_i \text{ avec } \lambda \neq 0, \quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \text{ avec } i \neq j.$$

Chacune est réversible, ce qui justifie l'équivalence des systèmes successifs : on écrit $\iff$ à chaque étape.

Méthode — algorithme du pivot. choisir dans la première colonne un coefficient non nul (le **pivot**), l'amener en première ligne par un échange, puis éliminer l'inconnue correspondante dans toutes les autres lignes par $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$. Recommencer sur le système restant : on obtient un système **échelonné**, que l'on résout « en remontant ». Trois issues : une unique solution; aucune solution (une ligne devient $0 = c$ avec $c \neq 0$); une infinité de solutions, décrites par un ou deux **paramètres**.

Remarque — interprétation géométrique. Dans $\mathbb{R}^2$, $ax + by = c$ (avec $(a, b) \neq (0, 0)$) est une droite : deux droites sont sécantes (une solution), parallèles distinctes (aucune) ou confondues (une infinité). Dans $\mathbb{R}^3$, $ax + by + cz = d$ (avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$) est un plan : trois plans se coupent en un point, en une droite, en un plan, ou n'ont aucun point commun.

► SAVOIR-FAIRE

- Résoudre une inéquation par factorisation et tableau de signes; encadrer une somme, un produit, un quotient; majorer une somme par télescopage. Manipuler $|\cdot|$: résoudre $|f(x)| \leq a$, utiliser l'inégalité triangulaire et ses variantes, traiter une somme de valeurs absolues par disjonction des cas.
- Déterminer majorants, minorants, maximum et minimum d'une partie de $\mathbb{R}$, prouver qu'un maximum n'existe pas, identifier une partie entière par encadrement. Calculer une valeur exacte ($\cos \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{8}$) par addition ou duplication; linéariser; transformer $a \cos t + b \sin t$; résoudre équations et inéquations trigonométriques sur le cercle, avec le bon modulo; résoudre un système 2×2 ou 3×3 par le pivot et l'interpréter géométriquement.

✖ PIÈGES

- Multiplier une inéquation par x ou par $x - 1$ sans discuter le signe; passer aux inverses sans vérifier le signe; simplifier une inéquation par une racine carrée. Écrire $|x| \leq a$ sans vérifier $a \geq 0$; oublier une des deux familles de solutions de $|f(x)| = |g(x)|$.
- Confondre « majorée » et « admet un maximum »; annoncer $\max A$ sans vérifier que le candidat appartient à A . Écrire $[-2, 7] = -2$ ou $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Ne donner que les solutions d'un intervalle de référence : il faut le modulo (2π pour $\cos$ et $\sin$, π pour $\tan$) et les deux familles pour $\cos x = c$ et $\sin x = c$. Diviser par $\cos x$ sans exclure $\cos x = 0$; travailler en degrés. Dans le pivot, multiplier une ligne par 0 ou faire $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_1$: l'équivalence est perdue.