

Fiche de cours

Fonctions usuelles

Généralités, dérivation, fonctions usuelles, fonctions à valeurs complexes

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

✖ ATTENTION — Le statut de ce chapitre

Chapitre de **techniques de calcul**. L'étude théorique des limites, de la continuité et de la dérivabilité est reportée aux chapitres 9 et 10 : ici, les théorèmes de dérivation (opérations, composée, réciproque) et la caractérisation des fonctions monotones sont **admis**, conformément au programme.

1 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Définition. Soit f une fonction d'une variable réelle. Son **ensemble de définition** D_f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ existe. Sa **courbe représentative** dans un repère est $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)), x \in D_f\}$.

Définition. Soit $D \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire $-x \in D$ pour tout $x \in D$). Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **paire** si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$, **impaire** si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$. Soit $T > 0$: f est **T -périodique** si $\forall x \in D, x + T \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.

Remarque. La symétrie du domaine fait partie de la définition : $x \mapsto \ln(x^2)$ est paire, mais $x \mapsto \ln x + \ln(-x)$ n'a aucun sens. Graphiquement : f paire $\iff \mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à (Oy) ; f impaire $\iff \mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à O ; f T -périodique $\iff \mathcal{C}_f$ invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

Méthode — réduire le domaine d'étude. si f est T -périodique, on l'étudie sur un intervalle de longueur T ; si de plus f est paire ou impaire, sur la moitié de cet intervalle, et l'on complète par les symétries ci-dessus.

Propriété — transformations du graphe. Soient $a \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^*$. La courbe de $x \mapsto f(x) + a$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{j}$; celle de $x \mapsto f(x + a)$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$ (*attention au signe*) ; celle de $x \mapsto \lambda f(x)$ par l'affinité verticale de rapport λ , celle de $x \mapsto f(\lambda x)$ par l'affinité horizontale de rapport $\frac{1}{\lambda}$; celle de $x \mapsto |f(x)|$ en symétrisant par rapport à (Ox) la partie de $\mathcal{C}_f$ située au-dessous de l'axe.

Définition. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \leq M$; **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \geq m$; **bornée** si elle est majorée et minorée — ce qui équivaut à : $|f|$ est majorée. f est **croissante** sur un intervalle I si $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, **strictement croissante** si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$; de même pour la décroissance ; **monotone** = croissante ou décroissante. Enfin f admet un **maximum global** en $a \in D$ si $\forall x \in D, f(x) \leq f(a)$, et un **maximum local** en a s'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in D \cap [a - \eta, a + \eta], f(x) \leq f(a)$; idem pour les minimums, un **extremum** étant un maximum ou un minimum.

✖ ATTENTION

« f est majorée par M » ne dit pas que M est atteint : $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est minorée par 0 sans jamais valoir 0. Ne pas confondre borne et extremum.

2 DÉRIVATION

Définition. f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand $x \rightarrow a$; cette limite est le nombre dérivé $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a alors pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. L'étude théorique est faite au chapitre 10.

Théorème — opérations, admis. Soient f et g dérivables sur un intervalle I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables sur I , et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ là où } g \text{ ne s'annule pas.}$$

Si u est dérivable sur I , à valeurs dans un intervalle J , et si v est dérivable sur J , alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u).$$

Propriété — dérivées des composées usuelles. Pour u dérivable et $n \in \mathbb{Z}$:

■ FORMULAIRE

- $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ (u ne s'annulant pas si $n < 0$); $(e^u)' = u' e^u$; $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$ (u ne s'annulant pas);
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ($u > 0$); $(\cos u)' = -u' \sin u$; $(\sin u)' = u' \cos u$; $(\tan u)' = u' (1 + \tan^2 u)$.

Théorème — dérivée d'une réciproque, admis. Soit f une bijection dérivable d'un intervalle I sur un intervalle J , et soit $b = f(a) \in J$. Si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Interprétation géométrique. Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$; la symétrie échange les tangentes, donc les pentes p et $\frac{1}{p}$. Si $f'(a) = 0$, la tangente horizontale devient verticale et f^{-1} n'est pas dérivable en b .

Définition. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et si f' est continue sur I . On définit par récurrence $f^{(0)} = f$ et $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ lorsque cela a un sens; f est de classe $\mathcal{C}^n$ si $f^{(n)}$ existe et est continue.

Théorème — caractérisation des monotonies, admis. Soit f dérivable sur un intervalle I . Alors f est constante sur $I \iff f' = 0$ sur I ; f est croissante sur $I \iff f' \geq 0$ sur I ; f est strictement croissante sur $I \iff f' \geq 0$ sur I et $\{x \in I, f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.

✖ ATTENTION

Deux hypothèses sont indispensables. **Sur un intervalle** : $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée < 0 sur $\mathbb{R}^*$ sans y être décroissante. **Et** $f' > 0$ n'est pas nécessaire à la stricte croissance : $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ bien que $f'(0) = 0$. En pratique : si $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points, f est strictement croissante.

Méthode — étudier une fonction. (1) domaine de définition; (2) parité, périodicité, réduction du domaine; (3) domaine de dérivabilité et calcul de f' ; (4) signe de f' (factoriser!); (5) tableau de variations avec valeurs et limites aux bornes; (6) conclusion : extremums, allure, tangentes.

Méthode — démontrer une inégalité $u(x) \leq v(x)$ sur I . poser $\varphi = v - u$, étudier le signe de φ' , dresser le tableau de variations de φ et comparer φ à sa valeur en un point bien choisi (souvent une borne de I , où φ s'annule).

Remarque — dérivées partielles. Pour f fonction de deux variables, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est la dérivée de $x \mapsto f(x, y)$ à y fixé, et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ celle de $y \mapsto f(x, y)$ à x fixé. Exemple : pour $f(x, y) = x^2 y + e^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + ye^{xy}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + xe^{xy}$. Tout développement théorique est hors programme à ce stade.

3 EXPONENTIELLE, LOGARITHMES, PUISSANCES

Théorème. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection strictement croissante, de dérivée $\exp$, vérifiant $e^{x+y} = e^x e^y$. Sa réciproque est le **logarithme népérien** $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, strictement croissant, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, vérifiant $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a, b > 0$; les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. On note $\log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ (logarithme décimal), $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$ (logarithme de base 2), et plus généralement $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ pour $a > 0, a \neq 1$.

Définition. Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$. Pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^\alpha$ est aussi définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété. Pour $x, y > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$. Suivant le signe de α , $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante ($\alpha > 0$), constante ($\alpha = 0$) ou strictement décroissante ($\alpha < 0$) sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha > 0$ elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0.

Théorème — croissances comparées. Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0.$$

Retenir la hiérarchie : « l'exponentielle l'emporte sur toute puissance, qui l'emporte sur tout logarithme ».

Théorème — deux inégalités fondamentales. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ et $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

Idée de preuve (exigible). Poser $\varphi(x) = e^x - 1 - x$: $\varphi'(x) = e^x - 1$ est du signe de x , donc φ décroît sur $\mathbb{R}_-$, croît sur $\mathbb{R}_+$ et atteint son minimum en 0, où $\varphi(0) = 0$; d'où $\varphi \geq 0$. De même $\psi(x) = x - \ln(1+x)$ a pour dérivée $\psi'(x) = \frac{x}{1+x}$, du signe

de x sur $] -1; +\infty[$, et $\psi(0) = 0$. Dans les deux cas l'égalité a lieu *uniquement* en $x = 0$: la courbe de $\exp$ est au-dessus de sa tangente en 0, celle de $\ln$ au-dessous de la sienne en 1.

4 VALEUR ABSOLUE ET PARTIE ENTIÈRE

Propriété. $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $\frac{|x|}{x}$ (1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$), mais **pas dérivable en 0** : les taux d'accroissement à droite et à gauche valent 1 et -1 . De même, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, soit $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est constante sur chaque $[n; n+1[$ ($n \in \mathbb{Z}$), donc dérivable de dérivée nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; elle n'est pas continue aux entiers. La **partie fractionnaire** $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique, à valeurs dans $[0; 1[$.

5 FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

Théorème — définitions; la bijectivité est admise, elle sera justifiée au chapitre 9. $\sin$ induit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$, de réciproque $\arcsin$: $[-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, impaire et strictement croissante; $\cos$ induit une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$, de réciproque $\arccos$: $[-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$, strictement décroissante (ni paire ni impaire); $\tan$ induit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $\arctan$: $\mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, impaire et strictement croissante.

Théorème — dérivées et domaines de dérivabilité — démonstration exigible.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ sur }]-1; 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ sur }]-1; 1[, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

En ± 1 , $\arcsin$ et $\arccos$ sont **continues mais non dérivables** (tangentes verticales).

Idée de preuve. Pour $\arcsin$: soit $y = \arcsin x$ avec $x \in]-1; 1[$, donc $y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $\sin'(y) = \cos y \neq 0$; le théorème de dérivation d'une réciproque donne $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos y}$. Or $\cos y > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Même schéma pour $\arccos$ (avec $\sin y > 0$ sur $]0; \pi[$) et pour $\arctan$ (avec $\tan'(y) = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$).

Propriété — identités. Pour $x \in [-1; 1]$: $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x) = 1$ si $x > 0$ et -1 si $x < 0$. Enfin $\tan(\arctan x) = x$ et $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Idée de preuve (exigible). $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$: poser $y = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, où $\cos y \geq 0$, et utiliser $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ — c'est la positivité de $\cos y$ qui autorise la racine. Pour $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$: la fonction $g : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$; g est donc constante sur chacun des deux intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et $g(1) = \frac{\pi}{2}$, $g(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

✗ ATTENTION — Le piège central du chapitre

$\arcsin(\sin x) = x$ **seulement si** $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; $\arccos(\cos x) = x$ **seulement si** $x \in [0; \pi]$; $\arctan(\tan x) = x$ **seulement si** $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. En revanche $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$, sans condition. Exemple : $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$.

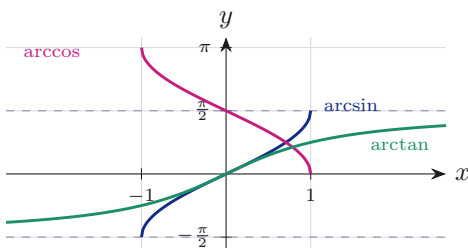


Figure 1 — Les trois fonctions circulaires réciproques.

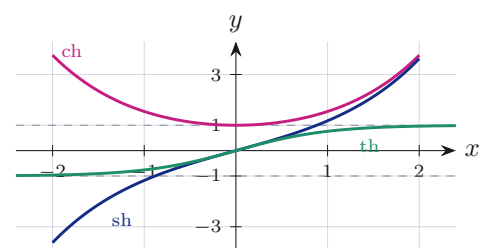


Figure 2 — Les trois fonctions hyperboliques; $\tanh$ a pour asymptotes $y = \pm 1$.

6 FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Définition. Pour $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Propriété. ch est paire, sh et th sont impaires; $\operatorname{ch} x \geq 1$ (donc ch ne s'annule jamais et th est définie sur $\mathbb{R}$) et $|\operatorname{th} x| < 1$. De plus

$$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}, \quad \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}, \quad \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} > 0.$$

Ainsi sh et th sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$; ch décroît sur $\mathbb{R}_-$, croît sur $\mathbb{R}_+$, de minimum $\operatorname{ch} 0 = 1$. Enfin $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ et $e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$.

Théorème — seule formule exigible. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$

Démonstration (exigible). $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) = e^{-x} e^x = e^0 = 1.$

✖ ATTENTION

Les **fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme**. On ne peut donc invoquer ni « argsh », ni « argch », ni « argth » : pour résoudre $\operatorname{ch} x = a$ ou $\operatorname{sh} x = a$, on revient à l'exponentielle et l'on pose $u = e^x > 0$, ce qui donne une équation du second degré en u . Ne pas confondre non plus th et $\tan$: th est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

7 FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, I intervalle de $\mathbb{R}$. On note $f = \operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f)$, où $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont, et l'on pose alors $f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$.

Propriété. Pour $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivables et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$: $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ là où g ne s'annule pas ; en particulier $\operatorname{Re}(f') = (\operatorname{Re} f)'$ et $\operatorname{Im}(f') = (\operatorname{Im} f)'$.

Théorème — dérivée de $\exp \circ \varphi$. Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable. Alors $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ est dérivable sur I et $(e^{\varphi})' = \varphi' e^{\varphi}$; en particulier $(t \mapsto e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

Méthode — dériver $t \mapsto e^{at} \cos(bt)$. écrire $e^{at} \cos(bt) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)t})$, dériver l'exponentielle complexe (n fois si besoin : on obtient $(a+ib)^n e^{(a+ib)t}$), puis reprendre la partie réelle. En notant $a+ib = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$, cela donne $\frac{d^n}{dt^n}(e^{at} \cos(bt)) = \rho^n e^{at} \cos(bt + n\theta)$.

➤ SAVOIR-FAIRE

- Déterminer un ensemble de définition, réduire le domaine d'étude par parité ou périodicité.
- Dériver une composée, un quotient, une puissance u^α , une expression $u^v = e^{v \ln u}$; préciser le *domaine de dérivabilité*. Dresser un tableau de variations complet, en déduire extremums et inégalités.
- Simplifier $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$, $\arctan(\tan x)$ en discutant la position de x ; calculer $\cos(\arcsin x)$, $\tan(\arccos x)$; montrer qu'une fonction est constante sur un intervalle en dérivant ($\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$).
- Résoudre une équation en ch , sh , th en posant $u = e^x$; dériver une fonction à valeurs complexes et l'utiliser pour $e^{at} \cos(bt)$.

★ EXEMPLE — deux études types

- **Simplification.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$: en posant $y = \arctan x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos y > 0$ et $1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$, donc $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, puis $\sin(\arctan x) = \tan y \cos y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- **Inégalité.** Montrons $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $\varphi(x) = \operatorname{ch} x - 1 - \frac{x^2}{2}$ est paire, $\varphi'(x) = \operatorname{sh} x - x$ et $\varphi''(x) = \operatorname{ch} x - 1 \geq 0$: φ' croît et $\varphi'(0) = 0$, donc $\varphi' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$; ainsi φ croît sur $\mathbb{R}_+$ avec $\varphi(0) = 0$, d'où $\varphi \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$ par parité.

✖ PIÈGES

- Oublier le *domaine de dérivabilité* : $\sqrt{\cdot}$ en 0, $\arcsin$ et $\arccos$ en ± 1 , $|\cdot|$ en 0.
- Écrire $\arcsin(\sin x) = x$ ou $\arccos(\cos x) = x$ sans condition sur x .
- Écrire $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ sans savoir $a > 0$ et $b > 0$; confondre $\ln(x^2) = 2 \ln |x|$ et $2 \ln x$.
- Utiliser x^α pour $x \leq 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ($(-8)^{1/3}$ n'a pas de sens ici) ; dériver u^v « comme une puissance » au lieu de passer par $e^{v \ln u}$; oublier le facteur u' dans une composée ; conclure « $f' \leq 0$ sur D donc f décroissante » quand D n'est pas un intervalle ; utiliser argsh , argch , argth (*hors programme*) ; confondre th et $\tan$.