

Fiche de cours Fonctions de deux variables

Ouverts de $\mathbb{R}^2$, dérivées partielles, gradient, règle de la chaîne, points critiques

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

✖ ATTENTION — Le périmètre de ce chapitre est très étroit

« Le point de vue est donc essentiellement pratique. Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme. » Sont **absents du programme** : les dérivées partielles d'ordre 2, la classe $\mathcal{C}^2$, le théorème de Schwarz, la formule de Taylor à l'ordre 2, la matrice hessienne et son critère, toute condition suffisante d'extremum, la notion de fonction différentiable, les intégrales doubles. Le texte ajoute : « l'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme ».

1 LE PLAN $\mathbb{R}^2$: BOULES ET OUVERTS

Notation. On identifie $\mathbb{R}^2$ et le plan muni d'un repère orthonormé. Un élément $A = (a, b)$ est appelé indifféremment *point* ou *vecteur*. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa **norme euclidienne canonique** et du produit scalaire associé :

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy', \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \|M - A\| = AM.$$

Définition — boule ouverte. Pour $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, la **boule ouverte** $B(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2, \|M - A\| < r\}$ est le disque de centre A et de rayon r , privé de son cercle.

Définition — ouvert. Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si $\forall A \in U, \exists r > 0, B(A, r) \subset U$: tout point de U est le centre d'un disque, de rayon strictement positif, entièrement contenu dans U .

Propriété. $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts ; toute boule ouverte est un ouvert ; une réunion *quelconque* d'ouverts est un ouvert ; une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.

Méthode — montrer qu'un ensemble est ouvert. soit on exhibe, pour $A \in U$ quelconque, un rayon r explicite (en fonction de A) tel que $B(A, r) \subset U$; soit on reconnaît U comme réunion ou intersection finie d'ensembles $\{g > 0\}$ avec g continue, qui sont des ouverts.

★ EXEMPLE — ouverts et non-ouverts

Ouverts : $\{x > 0\}$ (demi-plan ouvert), $\{x^2 + y^2 < 1\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\{xy \neq 0\}$, $\{y > x^2\}$. **Non ouverts** : le disque fermé $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ (aucune boule centrée en $(1, 0)$ n'y est contenue), une droite, un segment, $\{x \geq 0\}$, tout ensemble fini non vide.

Remarque. Les ouverts ne servent ici qu'à disposer d'un cadre où « bouger un peu dans toutes les directions » a un sens : c'est exactement ce dont on a besoin pour dériver et pour parler d'extremum local. Aucune topologie de $\mathbb{R}^2$ n'est étudiée pour elle-même.

2 FONCTIONS DE DEUX VARIABLES, SURFACE, LIGNES DE NIVEAU

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une **fonction de deux variables** sur U est une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Son **graphe** $\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$ est appelé la **surface** d'équation $z = f(x, y)$.

Définition. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la **ligne de niveau** λ de f est $\mathcal{C}_\lambda = \{(x, y) \in U, f(x, y) = \lambda\}$. C'est la projection sur le plan (xOy) de l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan horizontal $z = \lambda$: ce sont les « courbes de niveau » d'une carte topographique.

Définition. f est **continue** en $A \in U$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall M \in U, \|M - A\| < \delta \implies |f(M) - f(A)| < \varepsilon$, c'est-à-dire si $f(M) \rightarrow f(A)$ quand $\|M - A\| \rightarrow 0$; f est continue sur U si elle l'est en tout point de U .

Propriété. Les applications $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ et les constantes sont continues ; somme, produit, quotient (de dénominateur ne s'annulant pas) et composition $g \circ f$ avec g continue sur un intervalle contenant $f(U)$ conservent la continuité. En pratique, toute fonction obtenue par ces opérations à partir des fonctions usuelles est continue sur son ensemble de définition.

Remarque. « La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme. » On ne cherchera donc jamais à étudier la continuité en un point où elle pose problème.

3 DÉRIVÉES PARTIELLES, FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^1$

Définition — applications partielles. Soient U un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$. Les **applications partielles** en (x_0, y_0) sont $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$, définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement x_0 et y_0 (c'est ici que sert l'hypothèse « U ouvert »).

Définition — dérivées partielles. f admet une **dérivée partielle** par rapport à x en (x_0, y_0) si la première application partielle est dérivable en x_0 ; on note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Méthode — calculer une dérivée partielle. pour $\partial f / \partial x$, on dérive l'expression de f par rapport à x en traitant y comme une constante; toutes les règles de dérivation d'une variable (produit, quotient, composée) s'appliquent telles quelles.

Définition — classe $\mathcal{C}^1$. f est de **classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U** si ses deux dérivées partielles existent en tout point de U et si les deux fonctions $\partial f / \partial x$ et $\partial f / \partial y$ sont continues sur U .

Propriété — opérations. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$, fg et f/g sur $\{g \neq 0\}$ le sont, avec les formules usuelles ($\partial(fg)/\partial x = \partial f / \partial x g + f \partial g / \partial x$, etc.). Si de plus φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert contenant $f(U)$, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x} = \varphi'(f) \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y} = \varphi'(f) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

En particulier toute fonction polynomiale, et toute fonction obtenue à partir des fonctions usuelles par ces opérations, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert où elle est définie.

✖ ATTENTION

L'existence des deux dérivées partielles en un point **n'entraîne pas** la continuité en ce point (commentaire explicite du programme) : elles ne décrivent le comportement de f que le long de deux directions. C'est la **continuité** des dérivées partielles — la classe $\mathcal{C}^1$ — qui donne de bonnes propriétés : toutes les hypothèses du chapitre sont des hypothèses de classe $\mathcal{C}^1$.

4 GRADIENT, DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE 1, PLAN TANGENT

Définition — gradient. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $(x_0, y_0) \in U$, le **gradient** de f en (x_0, y_0) est le vecteur de $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Théorème — développement limité à l'ordre 1. Soient U un ouvert, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $(x_0, y_0) \in U$. Alors, quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|)$$

soit, à l'aide du gradient, $f((x_0, y_0) + (h, k)) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$.

La démonstration est hors programme. Ce qu'il faut retenir : près de (x_0, y_0) , f est bien approchée par une fonction **affine** des deux variables — c'est l'**approximation linéaire**.

Remarque. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est en particulier continue sur U : le développement limité donne $f(M) \rightarrow f(A)$ quand $M \rightarrow A$.

Théorème — plan tangent. Avec les mêmes hypothèses, le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est le **plan tangent** à la surface $z = f(x, y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$: c'est le plan dont le graphe approche celui de f à un $o(\|(h, k)\|)$ près.

Méthode — approximation numérique. pour estimer $f(x_0 + h, y_0 + k)$ avec h, k petits, on calcule f et ∇f en un point simple voisin, puis $f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle$.

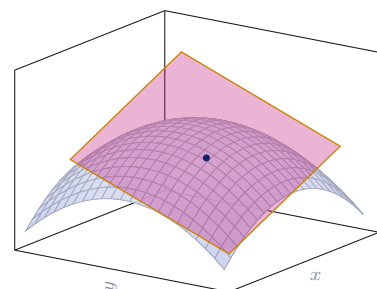


Figure 1 — La surface $z = f(x, y)$ et son plan tangent en un point : au voisinage du point de contact, les deux se confondent au premier ordre.

5 DÉRIVÉE SELON UN VECTEUR ET RÈGLE DE LA CHAÎNE

Définition — dérivée selon un vecteur. Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in U$ et $u \in \mathbb{R}^2$. La **dérivée de f en A selon le vecteur u** est, lorsqu'elle existe, $D_u f(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + tu) - f(A)}{t}$. (U étant ouvert, $A + tu \in U$ pour t assez petit : le quotient a un sens.)

Théorème. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , alors $D_u f(A)$ existe pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ et

$$D_u f(A) = \langle \nabla f(A), u \rangle = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(A) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(A) \quad \text{où } u = (u_1, u_2).$$

En particulier $D_{(1,0)} f(A) = \partial f / \partial x(A)$ et $D_{(0,1)} f(A) = \partial f / \partial y(A)$.

Propriété — direction de plus forte croissance. Supposons $\nabla f(A) \neq 0$. Pour tout vecteur unitaire u , l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|D_u f(A)| = |\langle \nabla f(A), u \rangle| \leq \|\nabla f(A)\|,$$

avec égalité si et seulement si u est colinéaire à $\nabla f(A)$. La valeur maximale $\|\nabla f(A)\|$ est atteinte pour $u = \frac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|}$: **le gradient indique la direction dans laquelle f croît le plus vite**, et sa norme donne ce taux de croissance maximal.

Théorème — règle de la chaîne, le long d'un arc. Soient I un intervalle, x et y deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in U$ pour tout $t \in I$, et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U . Alors $f \circ \gamma : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Théorème — règle de la chaîne, deux variables. Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^2$, φ et ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V telles que $(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in U$ pour tout $(u, v) \in V$, et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . Alors $F : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

★ EXEMPLE — coordonnées polaires

Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, posons $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. La règle de la chaîne donne, les dérivées partielles de g étant évaluées en $(r \cos \theta, r \sin \theta)$,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Théorème — le gradient est orthogonal aux lignes de niveau. Soient f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\gamma : I \rightarrow U$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$ tracé sur la ligne de niveau $\mathcal{C}_\lambda$, c'est-à-dire tel que $f(\gamma(t)) = \lambda$ pour tout $t \in I$. Alors

$$\forall t \in I, \quad \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Idée de preuve (exigible). La fonction $t \mapsto f(\gamma(t))$ est constante sur l'intervalle I , donc de dérivée nulle; or cette dérivée vaut $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ par la règle de la chaîne.

Remarque. Autrement dit : en un point où il est non nul, le gradient est **orthogonal à la tangente** à la ligne de niveau passant par ce point. La tangente à $\mathcal{C}_\lambda$ en $A = (x_0, y_0)$ a donc pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0) = 0.$$

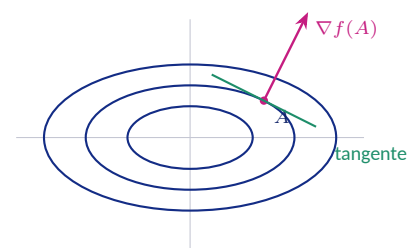


Figure 2 — Lignes de niveau de $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ et gradient en A : il est orthogonal à la ligne de niveau et pointe vers les niveaux croissants.

6 EXTREMUMS

Définition. Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $P \in A$. f admet en P un **maximum global** sur A si $f(M) \leq f(P)$ pour tout $M \in A$, et un **maximum local** s'il existe $r > 0$ tel que $f(M) \leq f(P)$ pour tout $M \in A \cap B(P, r)$; on définit de même les minima en renversant l'inégalité. Un **extremum** est un maximum ou un minimum; il est dit **strict** si l'inégalité est stricte pour $M \neq P$.

Définition — point critique. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U . Un point $P \in U$ est un **point critique** de f si

$$\nabla f(P) = (0, 0), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0.$$

Théorème — condition nécessaire d'extremum. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . Si f admet un extremum local en $P \in U$, alors P est un point critique de f .

Démonstration (exigible). Notons $P = (x_0, y_0)$ et supposons par exemple f maximale localement en P : il existe $r > 0$ tel que $B(P, r) \subset U$ et $f(M) \leq f(P)$ sur $B(P, r)$. L'application partielle $\sigma : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]x_0 - r; x_0 + r[$ et y admet un maximum en un point intérieur, x_0 ; le théorème correspondant à une variable donne $\sigma'(x_0) = 0$, c'est-à-dire $\partial f / \partial x(P) = 0$. De même avec $y \mapsto f(x_0, y) : \partial f / \partial y(P) = 0$, d'où $\nabla f(P) = 0$. $\square$

✖ **ATTENTION — les deux erreurs à ne pas commettre**

- **La réciproque est fausse** : $f(x, y) = x^2 - y^2$ vérifie $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, mais $f(t, 0) = t^2 > 0$ et $f(0, t) = -t^2 < 0$ pour $t \neq 0$: f prend des valeurs $> f(0, 0)$ et $< f(0, 0)$ dans tout disque centré en l'origine. Un point critique peut n'être ni un maximum ni un minimum.
- **L'hypothèse « U ouvert » est essentielle** : sur $A = [0; 1]^2$, la fonction $f(x, y) = x + y$ atteint son maximum en $(1, 1)$ sans que son gradient y soit nul. Un extremum peut être atteint au bord, où le théorème ne dit rien.

Méthode — étudier les extremums sur un ouvert. aucune condition suffisante n'est au programme : après avoir déterminé les points critiques, on conclut par des arguments élémentaires. *Extremum global* : écrire $f(M) - f(P)$ comme une somme de carrés ou une quantité de signe constant (factorisation, forme canonique), ou majorer par une inégalité classique. *Point critique qui n'est pas un extremum* : exhiber deux vecteurs u pour lesquels $t \mapsto f(P + tu) - f(P)$ change de signe. *Extremum local* : étudier le signe de $f(P + (h, k)) - f(P)$ pour (h, k) petit, en minorant les termes de plus bas degré. *Sur une partie A non ouverte* : séparer les points autour desquels A contient une boule (points critiques) et le bord (paramétrage, puis étude à une variable).

► **SAVOIR-FAIRE**

- Reconnaître un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et le justifier par une boule explicite ; calculer des dérivées partielles, un gradient ; justifier qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Écrire l'équation du plan tangent et s'en servir pour une approximation numérique.
- Calculer une dérivée selon un vecteur, déterminer la direction de plus forte croissance ; déterminer la tangente à une ligne de niveau à l'aide du gradient.
- Appliquer la règle de la chaîne le long d'un arc, et lors d'un changement de variables $(u, v) \mapsto (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ — en particulier en polaires.
- Déterminer les points critiques, puis conclure sur leur nature par une factorisation ou une inégalité.

★ **EXEMPLE — une étude complète**

Soit $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Elle est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$, et $\nabla f(x, y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)$. Le système $y = x^3, x = y^3$ donne $x = x^9$, soit $x(x^8 - 1) = 0$: les points critiques sont $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Pour conclure, on écrit

$$f(x, y) + 2 = x^4 + y^4 - 4xy + 2 = (x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2 - 4xy + 2 = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 \geq 0.$$

Donc $f \geq -2$ sur $\mathbb{R}^2$, avec égalité si et seulement si $x^2 = y^2$ et $xy = 1$, c'est-à-dire en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$: f admet -2 pour *minimum global*, atteint en ces deux points. Enfin $f(t, t) = 2t^4 - 4t^2 < 0 = f(0, 0)$ et $f(t, 0) = t^4 > 0$ pour t petit non nul : $(0, 0)$ n'est pas un extremum.

✖ **PIÈGES**

- Dériver par rapport à x en oubliant que y est fixé (ou l'inverse) ; confondre le gradient (un vecteur) et une dérivée (un nombre).
- Oublier d'évaluer $\partial f / \partial x$ et $\partial f / \partial y$ au point courant de l'arc dans la règle de la chaîne : $(f \circ \gamma)'(t) = \partial f / \partial x(\gamma(t))x'(t) + \partial f / \partial y(\gamma(t))y'(t)$.
- Croire qu'un point critique est un extremum, ou chercher à conclure par un « critère » d'ordre 2 : il n'y en a aucun au programme ; conclure à un extremum *global* à partir d'une étude *locale*, ou oublier le bord lorsque l'ensemble d'étude n'est pas ouvert.
- Oublier l'hypothèse « vecteur unitaire » dans « le gradient donne la direction de plus forte croissance » ; écrire le plan tangent sous la forme $z = f(x, y) + \dots$ alors que les dérivées partielles y sont évaluées au point de contact et que l'équation est affine en (x, y) .