

Fiche de cours

Espaces préhilbertiens

Produit scalaire, norme associée, orthogonalité, bases orthonormées, projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

Dans toute la fiche E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel : les scalaires sont réels, il n'est jamais question de produit scalaire hermitien. On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

1 PRODUIT SCALAIRE

Définition. Un **produit scalaire** sur E est une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ **bilinéaire** (linéaire en chaque variable, l'autre étant fixée), **symétrique** ($\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$), **positive** ($\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout x) et **définie** ($\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$) : une *forme bilinéaire symétrique définie positive*.

Notation. On note $\langle x, y \rangle$, ou $(x | y)$, ou $x \cdot y$. Le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace préhilbertien réel** ; si de plus E est de dimension finie, c'est un **espace euclidien**. La symétrie dispense de vérifier la linéarité par rapport à la seconde variable ; « positive » et « définie » restent deux conditions *distinctes*, et c'est la seconde que l'on oublie.

Propriété — les exemples du programme. Les applications suivantes sont des produits scalaires.

- **Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$:** $\langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. **Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:** $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A {}^tB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{i,j}$.
- Sur $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ avec $a < b$, et sur $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{R}_n[X]$: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$, et plus généralement $\int_a^b f g w$ avec w continue strictement positive sur $[a; b]$.

Idée de preuve (cas intégraux). Bilinéarité et positivité sont celles de l'intégrale ; le caractère défini vient du théorème « une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle » (chapitre 21), appliqué à $h = f^2$. C'est là, et là seulement, qu'intervient la continuité : sur les fonctions continues par morceaux, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ reste positive mais n'est plus définie.

✖ ATTENTION

Sur $\mathbb{R}[X]$, le caractère défini vient de ce qu'un polynôme nul sur un segment non réduit à un point a une infinité de racines. Avec une somme d'évaluations $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$, il faut $n+1$ points *distincts* et se restreindre à $\mathbb{R}_n[X]$: sur $\mathbb{R}[X]$ entier, $\prod_k (X - a_k)$ est non nul de « norme » nulle.

Méthode — montrer que φ est un produit scalaire. bilinéarité ; symétrie ; $\varphi(x, x) \geq 0$ en l'écrivant comme une somme de carrés ou une intégrale de carré ; puis $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$, une somme de carrés nulle ayant tous ses termes nuls.

2 NORME ASSOCIÉE, INÉGALITÉS DE CAUCHY-SCHWARZ ET TRIANGULAIRE

Définition. La **norme associée** au produit scalaire est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, et la **distance** de x à y est $d(x, y) = \|x - y\|$; un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**. On a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Propriété — identité remarquable et polarisation. Pour tous $x, y \in E$:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle, \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle,$$

d'où la **formule de polarisation**, qui reconstitue le produit scalaire à partir de la seule norme :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right) = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right).$$

En ajoutant les deux premières égalités : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Théorème — inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour tous $x, y \in E$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

avec **égalité si et seulement si x et y sont colinéaires**.

Démonstration (exigible) — l'idée : un trinôme positif. Si $y = 0$, tout est nul. Sinon $\Phi(t) = \|x + ty\|^2 = \|y\|^2 t^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|x\|^2$ est un trinôme du second degré ($\|y\|^2 \neq 0$) positif sur $\mathbb{R}$: son discriminant $4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2$ est ≤ 0 , d'où l'inégalité. Égalité

$\Longleftrightarrow \Delta = 0 \Longleftrightarrow \Phi$ a une racine t_0 , et alors $\|x + t_0 y\| = 0$ donne $x = -t_0 y$; réciproquement si $x = \lambda y$, les deux membres valent $|\lambda| \|y\|^2$.

★ **EXEMPLE — les deux cas du programme**

Sommes finies : $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^n a_k^2)(\sum_{k=1}^n b_k^2)$, avec égalité si et seulement si (a_k) et (b_k) sont proportionnelles. **Intégrales :** pour f, g continues sur $[a; b]$, $(\int_a^b f g)^2 \leq (\int_a^b f^2)(\int_a^b g^2)$, avec égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Théorème — inégalité triangulaire. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, avec égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires (l'un est nul, ou $y = \lambda x$ avec $\lambda > 0$). On en déduit $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Démonstration (exigible). $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ par Cauchy-Schwarz, puis croissance de la racine carrée. Égalité $\Longleftrightarrow \langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$, soit x, y colinéaires et $\langle x, y \rangle \geq 0$: colinéarité de même sens.

3 ORTHOGONALITÉ, FAMILLES ORTHONORMÉES, GRAM-SCHMIDT

Définition. Deux vecteurs x, y sont **orthogonaux**, noté $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$. Une famille $(x_1, \dots, x_p)$ est **orthogonale** si $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$; elle est **orthonormée** (ou *orthonormale*) si de plus $\|x_i\| = 1$ pour tout i , c'est-à-dire si $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}$.

Théorème — théorème de Pythagore. $x \perp y \Longleftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Plus généralement, si $(x_1, \dots, x_p)$ est orthogonale,

$$\|\sum_{i=1}^p x_i\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2.$$

Idée de preuve (exigible). C'est l'identité remarquable, lue dans les deux sens; pour p vecteurs, développer $\|\sum_i x_i\|^2 = \sum_{i,j} \langle x_i, x_j \rangle$, où seuls survivent les termes $i = j$.

Théorème — liberté. Toute famille **orthogonale de vecteurs non nuls** est libre. En particulier toute famille orthonormée est libre.

Démonstration (exigible) — l'idée : tester contre chaque vecteur. Si $\sum_i \lambda_i x_i = 0$, le produit scalaire avec x_j donne $\lambda_j \|x_j\|^2 = 0$, et $x_j \neq 0$ force $\lambda_j = 0$.

✖ **ATTENTION**

L'hypothèse « vecteurs non nuls » est indispensable : la famille $(0, x)$ est orthogonale et liée. Et $x \perp y$ n'entraîne pas que (x, y) soit libre.

Définition — orthogonal d'une partie. Pour $X \subset E$ non vide, $X^\perp = \{y \in E, \forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0\}$.

Propriété. $X^\perp$ est un **sous-espace vectoriel** de E : c'est l'intersection des noyaux des formes linéaires $y \mapsto \langle x, y \rangle, x \in X$. De plus $X^\perp = (\text{Vect } X)^\perp$, $X \subset Y \Rightarrow Y^\perp \subset X^\perp$, $E^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = E$; et pour un sous-espace F : $F \cap F^\perp = \{0\}$, $F \subset (F^\perp)^\perp$.

✖ **ATTENTION**

$F^\perp$ n'est pas le **complémentaire** de F : c'est un sous-espace, donc il contient 0. Et $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp$ se calcule en résolvant le système $\langle u_1, y \rangle = \dots = \langle u_p, y \rangle = 0$: il suffit de tester les générateurs.

Théorème — algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille **libre** de E . Il existe une **unique** famille orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ telle que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ et $\langle v_k, e_k \rangle > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Elle est donnée par $w_1 = v_1$, puis pour $k \geq 2$

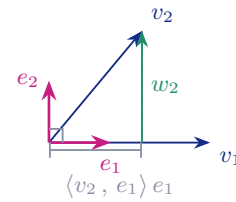
$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, e_i \rangle e_i, \quad e_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}.$$

Idée de preuve (exigible). Récurrence : $w_k \neq 0$ sinon $v_k \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k-1})$ contredirait la liberté; et $\langle w_k, e_j \rangle = \langle v_k, e_j \rangle - \langle v_k, e_j \rangle = 0$ pour $j < k$, d'où l'orthonormalité; enfin $\langle v_k, e_k \rangle = \|w_k\| > 0$.

La figure : on retranche à v_2 sa composante sur e_1 ; le reste w_2 est orthogonal à e_1 , et $e_2 = w_2 / \|w_2\|$. En pratique on utilise la variante non normalisée

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$

et l'on ne normalise qu'à la fin : les calculs restent rationnels.



4 BASES ORTHONORMÉES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Théorème — existence. Tout espace euclidien E de dimension $n \geq 1$ admet une base orthonormée : il suffit d'appliquer Gram-Schmidt à une base quelconque de E .

Théorème — base orthonormée incomplète. Soit E euclidien de dimension n . Toute famille orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ de E se complète en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E . *Idée de preuve.* Elle est libre, donc se complète en une base (chapitre 17), et Gram-Schmidt laisse inchangés les p premiers vecteurs, déjà orthonormés.

Théorème — calculs dans une base orthonormée. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Pour tous $x, y \in E$:

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = {}^tXY, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2,$$

où X, Y sont les colonnes de coordonnées dans $\mathcal{B}$: **dans une base orthonormée, tout produit scalaire se lit comme le produit scalaire canonique sur les coordonnées.** *Idée de preuve.* Si $x = \sum_i x_i e_i$, le produit scalaire avec e_j donne $x_j = \langle x, e_j \rangle$; puis développer par bilinéarité avec $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$.

✗ ATTENTION

Si la base est seulement *orthogonale* (non normée), la formule devient $x = \sum_i \frac{\langle x, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i$: oublier les $\|e_i\|^2$ est l'erreur de calcul la plus fréquente du chapitre.

5 SUPPLÉMENTAIRE ORTHOGONAL, PROJECTION ORTHOGONALE, DISTANCE

Théorème — supplémentaire orthogonal. Soient E préhilbertien et F un sous-espace de E de **dimension finie**. Alors $E = F \oplus F^\perp$, et $F^\perp$ s'appelle le **supplémentaire orthogonal** de F dans E .

Démonstration (exigible) — l'idée : poser le candidat et vérifier. $F \cap F^\perp = \{0\}$, car $x \in F \cap F^\perp$ donne $\langle x, x \rangle = 0$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F (qui existe, F étant euclidien) ; pour $x \in E$, posons $y = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i \in F$ et $z = x - y$: alors $\langle z, e_j \rangle = 0$ pour tout j , donc $z \perp F$ et $x = y + z$.

✗ ATTENTION

L'hypothèse « F de dimension finie » est essentielle. Sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\langle P, Q \rangle = \sum_k a_k b_k$ (somme finie des produits de coefficients), posons $F = \{P, P(1) = 0\}$. Comme $X^k - 1 \in F$, tout $A \in F^\perp$ vérifie $\alpha_k = \alpha_0$ pour tout k , donc $A = 0 : F^\perp = \{0\}$ bien que $F \neq E$, et $E = F \oplus F^\perp$ est *faux*.

Définition. La **projection orthogonale sur F** , notée p_F , est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$: $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$. C'est un projecteur ($p_F^2 = p_F$), d'image F et de noyau $F^\perp$.

Théorème — expression dans une base orthonormée de F . Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F , alors

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i.$$

C'est le vecteur y construit ci-dessus. Si la base de F est seulement orthogonale, $p_F(x) = \sum_i \frac{\langle x, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i$.

Théorème — dimension de l'orthogonal. Si E est euclidien de dimension n et F un sous-espace de E : $\dim F^\perp = n - \dim F$, et $(F^\perp)^\perp = F$.

Définition — distance à un sous-espace. Pour $x \in E$ et F de dimension finie, $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Théorème — caractérisation du projeté par la distance. Soient F de dimension finie et $x \in E$. Alors

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|,$$

et $p_F(x)$ est l'**unique** vecteur de F réalisant cette borne inférieure : pour tout $y \in F$ distinct de $p_F(x)$, $\|x - y\| > d(x, F)$.

Démonstration (exigible) — l'idée : Pythagore sur $x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)$. Pour $y \in F$, le premier terme est dans $F^\perp$, le second dans F : ils sont orthogonaux, donc $\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$, avec égalité si et seulement si $y = p_F(x)$.

Théorème — hyperplan et vecteur normal. Soit $u \in E$ non nul. Alors $H = \text{Vect}(u)^\perp = \{u\}^\perp$ est le noyau de la forme linéaire non nulle $y \mapsto \langle u, y \rangle$: c'est un **hyperplan** de E , de **vecteur normal** u . En dimension finie, tout hyperplan est de cette forme, son vecteur normal étant unique à un scalaire non nul près. Pour tout $x \in E$:

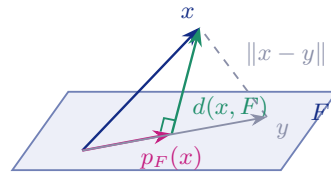
$$p_H(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u, \quad d(x, H) = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|}.$$

Idée de preuve. $(u/\|u\|)$ est une base orthonormée de $\text{Vect}(u)$, donc $p_{\text{Vect}(u)}(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$; puis $p_H = \text{id}_E - p_{\text{Vect}(u)}$ et $d(x, H) = \|p_{\text{Vect}(u)}(x)\|$.

Propriété. En appliquant Pythagore à $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$:

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2,$$

donc $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$ et $d(x, F) \leq \|x\|$: $p_F(x)$ est le **pied de la perpendiculaire** abaissée de x sur F .



► SAVOIR-FAIRE

- Vérifier qu'une application est un produit scalaire (bilinéarité, symétrie, positivité, caractère *défini*), repérer l'axiome en défaut dans un contre-exemple ; majorer une somme ou une intégrale par Cauchy-Schwarz et *discuter le cas d'égalité* en revenant à la colinéarité.
- Orthonormaliser une famille libre par Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et contrôler en recalculant les $\langle e_i, e_j \rangle$; déterminer $F^\perp$ par un système, vérifier $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.
- Calculer $p_F(x)$ dans une base orthonormée de F , puis $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ (pour un hyperplan, passer par le vecteur normal), et reconnaître un problème de minimisation — d'une somme de carrés, d'une intégrale de carré — comme un calcul de distance.

★ EXEMPLE — Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}_2[X]$, une distance, un hyperplan

Sur $\mathbb{R}_2[X]$ muni de $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$, orthonormalisons $(1, X, X^2)$: $w_1 = 1$ et $e_1 = 1$, puis

$$w_2 = X - \frac{1}{2}, \quad \|w_2\|^2 = \frac{1}{12}, \quad e_2 = \sqrt{3}(2X - 1); \quad w_3 = X^2 - X + \frac{1}{6}, \quad \|w_3\|^2 = \frac{1}{180}, \quad e_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1).$$

Contrôle : $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ pour tous i, j . ✓ Comme $w_3 = X^2 - p_F(X^2)$ avec $F = \mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(e_1, e_2)$, on obtient $d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|w_3\| = \frac{\sqrt{5}}{30}$, c'est-à-dire $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \frac{1}{180}$, atteint pour $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$.

Un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Dans $\mathbb{R}^3$ canonique, $H = \{(x, y, z), x + y + z = 0\} = \text{Vect}(u)^\perp$ avec $u = (1, 1, 1)$ pour vecteur normal. Pour $x = (1, 2, 3)$: $\langle x, u \rangle = 6$, $\|u\|^2 = 3$, donc $p_H(x) = (1, 2, 3) - 2(1, 1, 1) = (-1, 0, 1)$ et $d(x, H) = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. **Contrôles** : $-1 + 0 + 1 = 0$ ✓ ; $x - p_H(x) = (2, 2, 2)$ colinéaire à u ✓ ; $\|x\|^2 = 14 = 2 + 12 = \|p_H(x)\|^2 + d(x, H)^2$ ✓.

✗ PIÈGES

- Oublier le caractère *défini* : $\int_0^1 fg$ sur les fonctions continues *par morceaux*, ou $\sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ sur $\mathbb{R}[X]$ entier, ne sont pas des produits scalaires.
- Confondre $F^\perp$ et le complémentaire de F ; croire deux vecteurs orthogonaux toujours libres (faux si l'un est nul) ; écrire $E = F \oplus F^\perp$ ou $(F^\perp)^\perp = F$ sans que F soit de dimension finie.
- Oublier de normaliser à la fin de Gram-Schmidt, ou utiliser $p_F(x) = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$ dans une base seulement *orthogonale* (il manque les $\|e_i\|^2$).
- Hors programme : « inégalité de Bessel », « identité du parallélogramme », matrices orthogonales, symétries orthogonales, endomorphismes symétriques, théorème spectral, produit scalaire hermitien.