

Fiche de cours

Ensembles et applications

Parties d'un ensemble, applications, images directe et réciproque, injections et surjections, relations

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

1 ENSEMBLES, APPARTENANCE, INCLUSION

Définition. Un **ensemble** E est une collection d'objets, appelés ses **éléments**; on écrit $x \in E$ si x est un élément de E , et $x \notin E$ sinon. L'ensemble **vide**, noté $\emptyset$, est l'ensemble n'ayant aucun élément. *Toute étude systématique de la théorie des ensembles est hors programme* : on se contente de ce vocabulaire.

Notation. Un ensemble se décrit *en extension*, par la liste de ses éléments (l'ordre et les répétitions n'y jouent aucun rôle : $\{2; 3; 3\} = \{3; 2\}$), ou *en compréhension*, par une propriété : $\{x \in \mathbb{R}, x^2 < 4\} =]-2; 2[$.

Définition. Soient A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B , ou que A est une **partie** (ou un sous-ensemble) de B , et l'on note $A \subset B$, lorsque

$$\forall x, \quad x \in A \implies x \in B.$$

On note $A \not\subset B$ la négation : il existe $x \in A$ tel que $x \notin B$.

Propriété. Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$ (transitivité); de plus $\emptyset \subset A$ et $A \subset A$.

Théorème — double inclusion. Pour deux ensembles A et B : $A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$.

Méthode — montrer une égalité d'ensembles. deux stratégies, et deux seulement. (i) *Double inclusion* : « soit $x \in A$; montrons $x \in B$ », puis la réciproque. (ii) *Chaîne d'équivalences* : « $x \in A \iff \dots \iff x \in B$ », ce qui traite les deux inclusions d'un coup, mais n'est possible que si chaque étape est bien une *équivalence*.

Définition. L'ensemble des parties de E est $\mathcal{P}(E) = \{A, A \subset E\}$. Ses éléments sont des *ensembles* : $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

✗ ATTENTION — $\in$ et $\subset$ ne se mélangent pas

Pour $E = \{1; 2; 3\}$: $1 \in E$ mais $1 \not\subset E$ (ce n'est pas un ensemble); $\{1\} \subset E$ et $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$, mais $\{1\} \notin E$. De même $\emptyset \subset E$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, alors que $\emptyset \notin E$. Enfin $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$: cet ensemble a *un* élément, il n'est pas vide.

2 OPÉRATIONS SUR LES PARTIES D'UN ENSEMBLE

Définition. Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

■ FORMULAIRE

- **Réunion** : $A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (le « ou » est inclusif);
- **Intersection** : $A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$; si $A \cap B = \emptyset$, A et B sont **disjointes**;
- **Différence** : $A \setminus B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B\}$;
- **Complémentaire** de A dans E : $\overline{A} = A^c = E \setminus A = \{x \in E, x \notin A\}$. Ainsi $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Propriété — règles de calcul. Pour A, B, C parties de E :

■ FORMULAIRE

- **commutativité, associativité, idempotence** : $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $A \cup A = A$ (idem pour $\cap$);
- **éléments neutres et absorbants** : $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup E = E$, $A \cap E = A$;
- **distributivité croisée** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- **lois de De Morgan** : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- **involutivité** : $\overline{\overline{A}} = A$; **contraposition** : $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A} \iff A \cap \overline{B} = \emptyset$;
- **caractérisations de l'inclusion** : $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$.

Idée de preuve. Chaque ligne traduit une règle de logique du chapitre 1 (distributivité de « et » sur « ou », négation d'une conjonction, contraposée); on la démontre par équivalences sur l'appartenance d'un x quelconque.

Définition. Soit E un ensemble. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E est un **recouvrement** de E si $\bigcup_{i \in I} A_i = E$. C'est une **partition** de E si, de plus, les A_i sont *non vides* et *deux à deux disjointes* :

$$\forall i \in I, A_i \neq \emptyset; \quad \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset; \quad \bigcup_{i \in I} A_i = E.$$

Autrement dit : tout élément de E appartient à *un et un seul* des A_i .

Définition. Le **produit cartésien** de E et F est $E \times F = \{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}$, ensemble des **couples**. On note $E^2 = E \times E$ et, plus généralement, $E_1 \times \dots \times E_n$ l'ensemble des n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$.

Propriété. $(x, y) = (x', y') \iff (x = x' \text{ et } y = y')$: dans un couple, l'ordre compte. On a $E \times F = \emptyset \iff (E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset)$, et $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

✖ ATTENTION

$\{x; y\} = \{y; x\}$ mais $(x, y) \neq (y, x)$ dès que $x \neq y$. Et $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$ en général : pour $A = D = \{0\}, B = C = \{1\}$, le couple $(0, 0)$ est dans le second, pas dans le premier.

3 APPLICATIONS

Définition. Une **application** f de E dans F associe à *chaque* $x \in E$ un *unique* $f(x) \in F$; E est l'**ensemble de départ**, F l'**ensemble d'arrivée**, $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} \subset E \times F$ le **graphe** de f , et $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ l'ensemble de ces applications. Le programme ne distingue pas fonction et application. Une **famille** $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de F est une application $I \rightarrow F$; une suite est une famille indexée par $\mathbb{N}$.

Définition. L'**identité** de E est $\text{id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$. La **fonction indicatrice** d'une partie A de E est

$$\mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0; 1\}, \quad \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Propriété. Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$, $\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$, et $A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$. L'application $A \mapsto \mathbf{1}_A$ est donc une *injection* de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}(E, \{0; 1\})$; c'est même une bijection.

Méthode — identité ensembliste par les indicatrices. traduire chaque membre en expression polynomiale en $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B, \dots$, puis identifier les deux polynômes en *tenant compte de* $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$.

Définition. Soient $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. La **restriction** de f à A est $f|_A : A \rightarrow F, x \mapsto f(x)$. Si $g : A \rightarrow F$ et $f : E \rightarrow F$ vérifient $f|_A = g$, on dit que f est un **prolongement** de g à E .

✖ ATTENTION

Deux applications sont égales si et seulement si elles ont *même ensemble de départ*, *même ensemble d'arrivée* et prennent les mêmes valeurs. Ainsi $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ sont deux applications *différentes* : la seconde est surjective, la première non. Changer l'ensemble d'arrivée change l'application.

4 IMAGE DIRECTE, IMAGE RÉCIPROQUE

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$. Pour $A \subset E$ et $B \subset F$, on pose

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} \quad (\text{image directe}),$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \quad (\text{image réciproque}).$$

On appelle **image** de f l'ensemble $\text{Im } f = f(E) \subset F$.

✖ ATTENTION — le piège du chapitre

$f^{-1}(B)$ est défini pour *toute* application f : cette notation ne suppose *aucunement* la bijectivité et n'a rien à voir avec l'application réciproque f^{-1} (§ suivant). C'est une *partie* de E : on écrit $f^{-1}(\{y\})$, jamais $f^{-1}(y)$, tant que la bijectivité n'est pas établie.

Théorème — image réciproque : elle commute avec tout. Soient $f : E \rightarrow F$ et $B, B' \subset F$. Alors

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'), \quad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'), \quad f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)},$$

et $B \subset B' \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

Idée de preuve (exigible). $x \in f^{-1}(B \cup B') \iff f(x) \in B \cup B' \iff (f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B') \iff x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$: la condition « $f(x) \in \cdot$ » se distribue sur les connecteurs logiques; idem pour $\cap$ et pour le complémentaire.

Théorème — image directe : une seule inclusion pour $\cap$. Soient $f : E \rightarrow F$ et $A, A' \subset E$. Alors

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'), \quad \boxed{f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')}, \quad A \subset A' \implies f(A) \subset f(A').$$

L'inclusion encadrée peut être stricte.

Contre-exemple (exigible). Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, $A = \{-1\}$ et $A' = \{1\}$: $A \cap A' = \emptyset$ donc $f(A \cap A') = \emptyset$, alors que $f(A) \cap f(A') = \{1\}$.

Théorème — aller-retour. Soient $f : E \rightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$. Alors

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(B)) \subset B,$$

ces inclusions pouvant être strictes. De plus $f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im } f$.

5 COMPOSITION, INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS

Définition. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, la **composée** est $g \circ f : E \rightarrow G, x \mapsto g(f(x))$. La composition est **associative** ($h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$) et admet les identités comme neutres ($f \circ \text{id}_E = f = \text{id}_F \circ f$), mais elle n'est **pas commutative**.

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$.

■ FORMULAIRE

- f est **injective** si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x'$ (de façon équivalente : $x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$) : tout élément de F a *au plus* un antécédent;
- f est **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$, c'est-à-dire $\text{Im } f = F$: tout élément de F a *au moins* un antécédent;
- f est **bijjective** si elle est injective et surjective : $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

Méthode — dans la pratique. pour l'injectivité, partir de $f(x) = f(x')$ et calculer jusqu'à $x = x'$. Sinon, fixer $y \in F$ et résoudre $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$: le nombre de solutions donne les trois réponses d'un coup. Pour nier, exhiber $x \neq x'$ avec $f(x) = f(x')$, ou un y sans antécédent.

Théorème — application réciproque. $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. Une telle g est alors unique : c'est l'**application réciproque** f^{-1} , elle-même bijective, avec $(f^{-1})^{-1} = f$; pour $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y .

Idée de preuve. Si f est bijective, poser $g(y) =$ l'unique antécédent de y . Réciproquement $g \circ f = \text{id}_E$ force l'injectivité (appliquer g à $f(x) = f(x')$) et $f \circ g = \text{id}_F$ la surjectivité ($y = f(g(y))$); l'unicité vient de $g' = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = g$.

Théorème — composition et injectivité / surjectivité. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

■ FORMULAIRE

- Si f et g sont injectives (resp. surjectives, bijectives), alors $g \circ f$ l'est; dans le dernier cas $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$;
- si $g \circ f$ est injective, alors f est injective; si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Idée de preuve (exigible). Deuxième point : si $f(x) = f(x')$ alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$. Si $z \in G$, il existe $x \in E$ avec $g(f(x)) = z$: l'élément $f(x)$ de F est un antécédent de z par g .

✗ ATTENTION

Les réciproques du second point sont **fausses**. Avec $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ (injective) et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$: $g \circ f$ est injective sur $\mathbb{R}_+$ alors que g ne l'est pas. Retenir : « ce qui est à droite dans $g \circ f$ hérite de l'injectivité, ce qui est à gauche hérite de la surjectivité ».

Théorème — injectivité, surjectivité et images. Soit $f : E \rightarrow F$. Alors f est injective $\iff \forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A \iff \forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$; et f est surjective $\iff \forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

6 RELATIONS BINAIRES : ÉQUIVALENCE ET ORDRE

Définition. Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E est la donnée, pour tout $(x, y) \in E^2$, du fait que « $x\mathcal{R}y$ » est vraie ou fausse. Elle est **réflexive** si $\forall x, x\mathcal{R}x$; **symétrique** si $\forall x, y, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$; **transitive** si $\forall x, y, z, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$; **antisymétrique** si $\forall x, y, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y$.

Définition. Une **relation d'équivalence** est une relation réflexive, symétrique et transitive. Pour $x \in E$, la **classe d'équivalence** de x est $\text{cl}(x) = \{y \in E, x\mathcal{R}y\}$.

Théorème — classes et partition. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E . Alors, pour tous $x, y \in E$:

$$x \in \text{cl}(x); \quad x\mathcal{R}y \iff \text{cl}(x) = \text{cl}(y); \quad \text{cl}(x) \neq \text{cl}(y) \implies \text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset.$$

Les classes d'équivalence, deux à deux distinctes, forment donc une **partition** de E . La notion d'ensemble quotient est hors programme.

Idée de preuve (exigible). La réflexivité donne $x \in \text{cl}(x)$: les classes sont non vides et recouvrent E . Si $x\mathcal{R}y$ et $z \in \text{cl}(y)$, la transitivité donne $x\mathcal{R}z$, d'où $\text{cl}(y) \subset \text{cl}(x)$, et la symétrie l'autre inclusion. Enfin $z \in \text{cl}(x) \cap \text{cl}(y)$ entraîne $\text{cl}(x) = \text{cl}(z) = \text{cl}(y)$: deux classes distinctes sont disjointes.

Notation — congruences. Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on écrit $a \equiv b [c] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, a - b = kc$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b [n] \iff n \mid (a - b)$. Dans les deux cas c'est une relation d'équivalence, compatible avec l'addition ; pour $a, b \in \mathbb{Z}$ elle l'est aussi avec la multiplication.

Définition. Une **relation d'ordre** sur E est une relation réflexive, antisymétrique et transitive ; on la note $\preccurlyeq$, et $(E, \preccurlyeq)$ est un **ensemble ordonné**. L'ordre est **total** si $\forall (x, y) \in E^2, x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$, et **partiel** sinon. Un $m \in A$ est le **plus grand élément** de $A \subset E$ si $\forall x \in A, x \preccurlyeq m$: il est unique par antisymétrie, mais peut ne pas exister.

★ EXEMPLE — les trois ordres de référence

$\leq$ sur $\mathbb{R}$: ordre *total*. $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$: ordre de plus petit élément $\emptyset$ et de plus grand élément E , *total si et seulement si* E a au plus un élément ($\{1\}$ et $\{2\}$ ne sont pas comparables). $\mid$ sur $\mathbb{N}$: ordre non total, de plus petit élément 1 et de plus grand élément 0 ; sur $\mathbb{Z}$ ce n'est pas un ordre, car $1 \mid -1$ et $-1 \mid 1$ sans que $1 = -1$.

► SAVOIR-FAIRE

- Démontrer une égalité d'ensembles par double inclusion, par équivalences ou par indicatrices ; manipuler $\mathcal{P}(E)$ sans confondre $\in$ et $\subset$.
- Calculer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$ sur des exemples ; savoir quelles identités sont des égalités et lesquelles ne sont que des inclusions, avec le contre-exemple.
- Montrer qu'une application est injective, surjective, bijective en résolvant $f(x) = y$; expliciter la réciproque.
- Exploiter « $g \circ f$ injective $\implies f$ injective » et « $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective ».
- Vérifier qu'une relation est une relation d'équivalence et décrire ses classes ; vérifier qu'une relation est un ordre et dire s'il est total.

✗ PIÈGES

- Confondre $f^{-1}(B)$ (toujours défini) et l'application réciproque f^{-1} (qui exige la bijectivité) ; écrire $f^{-1}(y)$ au lieu de $f^{-1}(\{y\})$.
- Écrire $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$: seule l'inclusion $\subset$ est vraie en général.
- Confondre $\in$ et $\subset$, notamment dans $\mathcal{P}(E)$, et oublier que $\emptyset$ est une partie de tout ensemble.
- Conclure une égalité d'ensembles après une seule inclusion, ou après une chaîne où une étape n'est qu'une implication.
- Oublier que les parties d'une partition sont *non vides* ; oublier l'antisymétrie (ordre) ou la symétrie (équivalence).
- Croire que g injective découle de « $g \circ f$ injective », ou que f est surjective dès que $g \circ f$ l'est.