

Fiche de cours

Dimension et applications linéaires

Dimension finie, théorème du rang, projecteurs et symétries, hyperplans, sous-espaces affines

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E, F, G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels ; toute hypothèse de dimension finie est écrite explicitement. L'étude théorique des espaces de dimension infinie et la dualité sont hors programme.

1 ESPACES DE DIMENSION FINIE, EXISTENCE DE BASES

Définition. E est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Sinon, E est dit de dimension infinie.

Notation. $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie ; $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ne le sont pas.

Théorème — base extraite. Soit $E \neq \{0\}$ de dimension finie et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E . Alors on peut en extraire une base : il existe $I \subset \llbracket 1 ; n \rrbracket$ tel que $(x_i)_{i \in I}$ soit une base de E .

Théorème — base incomplète. Soit E de dimension finie, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E et $(x_i)_{i \in I}$ une sous-famille libre ($I \subset \llbracket 1 ; n \rrbracket$). Alors il existe J avec $I \subset J \subset \llbracket 1 ; n \rrbracket$ tel que $(x_j)_{j \in J}$ soit une base de E . En particulier : **toute famille libre d'un espace de dimension finie se complète en une base** à l'aide de vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Idée de preuve (exigible). On considère l'ensemble des parties $J \supset I$ telles que $(x_j)_{j \in J}$ soit libre ; il est non vide (il contient I) et fini, donc possède un élément J de cardinal maximal. Pour $k \notin J$, la famille $(x_j)_{j \in J} \cup (x_k)$ est liée par maximalité, donc $x_k \in \text{Vect}(x_j)_{j \in J}$ (le seul coefficient pouvant être non nul dans une relation est celui de x_k , car $(x_j)_{j \in J}$ est libre). Ainsi $\text{Vect}(x_j)_{j \in J}$ contient tous les x_k , donc contient $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$: la famille est libre et génératrice, c'est une base.

Remarque. Il n'y a **aucune unicité** du complément, et on ne complète pas avec n'importe quel vecteur : $((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais $(2, 2, 0)$ ne la complète pas en une base.

2 DIMENSION

Théorème — lemme fondamental. Si E est engendré par n vecteurs, alors **toute famille de $n+1$ vecteurs de E est liée**. Autrement dit : dans un espace engendré par n vecteurs, une famille libre a au plus n éléments.

Idée de preuve (exigible). Récurrence sur n : pour $n = 1$, deux vecteurs d'une droite sont colinéaires ; pour l'hérédité, on décompose les $n+1$ vecteurs sur la famille génératrice et l'on élimine le dernier générateur par combinaisons, se ramenant à n vecteurs d'un espace engendré par $n-1$ vecteurs.

Théorème — dimension. Si $E \neq \{0\}$ est de dimension finie, toutes ses bases ont le même cardinal fini, appelé **dimension** de E et noté $\dim E$. Par convention $\dim \{0\} = 0$.

Propriété — dimensions usuelles.

■ FORMULAIRE

- $\dim \mathbb{K}^n = n$ (base canonique) ; $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ (base $(1, X, \dots, X^n)$) ; $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.
- $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est de dimension 2 (base $(1, i)$) : la dimension dépend du corps de base.
- $\dim(E_1 \times \dots \times E_m) = \dim E_1 + \dots + \dim E_m$.
- Solutions de $y' + a(t)y = 0$ sur un intervalle I (a continue) : dimension 1. Solutions de $y'' + by' + cy = 0$ (b, c constantes) : dimension 2. Suites vérifiant $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$ avec $\beta \neq 0$: dimension 2.

Théorème — caractérisation des bases par le cardinal. Soit E de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{F}$ une famille de exactement n vecteurs de E . Alors

$$\mathcal{F} \text{ est une base} \iff \mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice.}$$

Méthode — prouver qu'une famille est une base. compter d'abord ses éléments. Si le cardinal vaut $\dim E$, une seule des deux vérifications suffit — en pratique la liberté, qui se ramène à un système linéaire homogène.

Définition. Le **rang** d'une famille finie de vecteurs est $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. On a toujours $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) \leq n$, avec égalité si et seulement si la famille est libre.

3 SOUS-ESPACES ET DIMENSION

Théorème. Soit E de dimension finie et F un sous-espace de E . Alors F est de dimension finie, $\dim F \leq \dim E$, et

$$\dim F = \dim E \iff F = E.$$

Remarque. L'implication « $\dim F = \dim E \Rightarrow F = E$ » exige que F soit un **sous-espace de E** et $\dim E$ **fini**; deux sous-espaces quelconques de même dimension n'ont, eux, aucune raison d'être égaux.

Théorème — formule de Grassmann. Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces de dimension finie de E ,

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Idée de preuve (exigible). On complète une base (a_i) de $E_1 \cap E_2$ en une base (a_i, b_j) de E_1 et en une base (a_i, c_k) de E_2 ; la famille (a_i, b_j, c_k) est une base de $E_1 + E_2$ — pour la liberté, on écrit $\sum \lambda_j b_j = -\sum \mu_k c_k \in E_1 \cap E_2$.

Théorème — somme directe et dimension. Soient E_1, E_2 de dimension finie. Alors

$$\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2,$$

et, si E est de dimension finie, deux des trois conditions suivantes entraînent la troisième — donc caractérisent $E = E_1 \oplus E_2$:

$$(i) E_1 \cap E_2 = \{0\} ; \quad (ii) E_1 + E_2 = E ; \quad (iii) \dim E_1 + \dim E_2 = \dim E.$$

Théorème — existence d'un supplémentaire. Tout sous-espace F d'un espace E de dimension finie admet *au moins* un supplémentaire, et tous ses supplémentaires ont pour dimension $\dim E - \dim F$. Un supplémentaire n'est jamais unique dès que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$.

Notation — base adaptée. Si $E = F \oplus G$, la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E , dite **adaptée** à la décomposition. Plus généralement pour $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$.

4 APPLICATIONS LINÉAIRES : NOYAU, IMAGE, RANG

Définition. $u : E \rightarrow F$ est **linéaire** si $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$ pour tous $x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de ces applications; c'est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective; sa réciproque est alors linéaire.

Propriété. $\text{Ker } u = \{x \in E, u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace de E ; $\text{Im } u = u(E)$ est un sous-espace de F . Plus généralement l'image directe et l'image réciproque d'un sous-espace par u sont des sous-espaces.

Théorème — caractérisation de l'injectivité. u est injective $\iff \text{Ker } u = \{0_E\}$.

Idée de preuve (exigible). Si u est injective et $u(x) = 0 = u(0)$ alors $x = 0$. Réciproquement, $u(x) = u(y) \Rightarrow u(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \text{Ker } u = \{0\}$, par linéarité.

Propriété — image et famille génératrice. Si $(x_i)_{i \in I}$ engendre E , alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$. En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E , $\text{Im } u = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_p))$ et $\text{rg } u = \text{rg}(u(e_1), \dots, u(e_p))$.

Définition. Si $\text{Im } u$ est de dimension finie, le **rang** de u est $\text{rg } u = \dim \text{Im } u$.

Propriété. Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ (images de dimension finie) : $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg } u, \text{rg } v)$. De plus le rang est **invariant par composition par un isomorphisme** : si φ et ψ sont des isomorphismes, $\text{rg}(\psi \circ u \circ \varphi) = \text{rg } u$.

5 ENDOMORPHISMES, PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

Définition. Un **endomorphisme** de E est un élément de $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau d'unité id_E , **non commutatif** dès que $\dim E \geq 2$. On note vu pour $v \circ u$ et u^k pour $u \circ \dots \circ u$. Les **automorphismes** de E forment le groupe $\text{GL}(E)$ des inversibles de cet anneau.

Définition. Si $E = F \oplus G$, la **projection sur F parallèlement à G** est $p : x = x_F + x_G \mapsto x_F$, et la **symétrie** associée est $s : x \mapsto x_F - x_G$.

Théorème — caractérisations. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$p \text{ est un projecteur (i.e. } p^2 = p) \iff p \text{ est la projection sur } \text{Im } p \text{ parallèlement à } \text{Ker } p,$$

et dans ce cas $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ avec $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$: les vecteurs de $\text{Im } p$ sont exactement les vecteurs invariants. De même $s^2 = \text{id}_E$ si et seulement si s est la symétrie associée à $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$. Enfin $p \mapsto s = 2p - \text{id}_E$ est une bijection entre projecteurs et symétries.

Idée de preuve (exigible). Si $p^2 = p$: pour $x \in E$, $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in \text{Im } p$ et $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$, donc $E = \text{Im } p + \text{Ker } p$. Si $y \in \text{Im } p \cap \text{Ker } p$, écrivons $y = p(x)$: alors $y = p(x) = p^2(x) = p(y) = 0$. D'où la somme directe, et p est bien l'identité sur $\text{Im } p$.

Remarque. $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$ est **faux pour un endomorphisme quelconque** : pour $u : (x, y) \mapsto (y, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, $\text{Im } u = \text{Ker } u = \mathbb{R} \times \{0\}$. Le théorème du rang ne donne que l'égalité des dimensions.

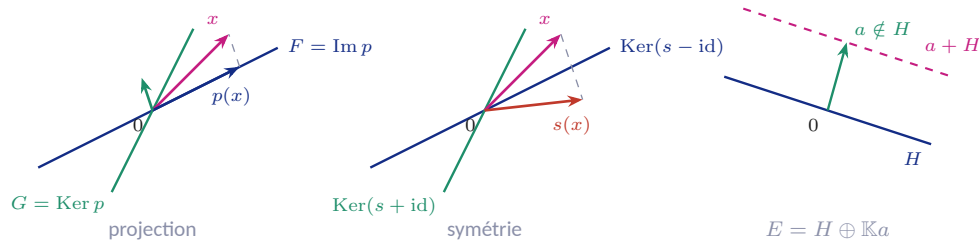


Figure 1 — Projection et symétrie associées à $E = F \oplus G$; hyperplan H , droite supplémentaire et hyperplan affine $a + H$.

6 APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

Théorème — détermination par l'image d'une base. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une famille quelconque de F . Il existe une **unique** $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(e_i) = f_i$ pour tout i ; elle est donnée par $u(\sum \lambda_i e_i) = \sum \lambda_i f_i$. De plus

$$\begin{aligned} u \text{ injective} &\iff (f_1, \dots, f_p) \text{ libre,} & u \text{ surjective} &\iff (f_1, \dots, f_p) \text{ génératrice de } F, \\ u \text{ bijective} &\iff (f_1, \dots, f_p) \text{ est une base de } F. \end{aligned}$$

Théorème — espaces isomorphes. Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension. En particulier tout espace de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ (isomorphisme « coordonnées dans une base »). Enfin $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Théorème — dimensions égales. Soient E et F de même dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective.}$$

En particulier, en dimension finie, un endomorphisme inversible à gauche ou à droite est inversible.

Remarque. L'équivalence tombe si $\dim E \neq \dim F$, et en dimension infinie : sur $\mathbb{K}[X]$, $P \mapsto XP$ est injective non surjective et $P \mapsto P'$ surjective non injective.

Théorème — théorème du rang. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie.

- **Forme géométrique** : si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors u induit un **isomorphisme de S sur $\text{Im } u$** .
- **Formule** : $\dim E = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$.

Idée de preuve (exigible). Soit S un supplémentaire de $\text{Ker } u$ (il existe, E étant de dimension finie) et $\tilde{u} : S \rightarrow \text{Im } u$ la restriction de u . **Injectivité** : $\text{Ker } \tilde{u} = S \cap \text{Ker } u = \{0\}$. **Surjectivité** : pour $x \in E$, $x = x_S + x_K$ donne $u(x) = u(x_S) \in \tilde{u}(S)$. Donc $\dim S = \text{rg } u$, et $\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim S$.

✗ ATTENTION

La formule fait intervenir $\dim E$, **la dimension de l'espace de départ**, et non $\dim F$: écrire $\dim \text{Ker } u + \text{rg } u = \dim F$ est l'erreur la plus fréquente du chapitre. Conséquences utiles : $\text{rg } u \leq \min(\dim E, \dim F)$ et $\dim \text{Ker } u \geq \dim E - \dim F$.

7 FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

Définition. Une **forme linéaire** sur E est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , les **formes coordonnées** $e_i^* : \sum \lambda_j e_j \mapsto \lambda_i$ sont des formes linéaires.

Définition. Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire **non nulle**.

Théorème. Soit E de dimension finie $n \geq 1$ et H un sous-espace de E . Alors

$$H \text{ est un hyperplan} \iff \dim H = n - 1 \iff \exists a \notin H, E = H \oplus \mathbb{K}a.$$

Plus précisément : si H est un hyperplan et D une droite **non contenue** dans H , alors $E = H \oplus D$; réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

Idée de preuve (exigible). Soit $H = \text{Ker } \varphi$ avec $\varphi \neq 0$: φ est surjective sur $\mathbb{K}$ (son image est un sous-espace non nul de $\mathbb{K}$), donc $\text{rg } \varphi = 1$ et le théorème du rang donne $\dim H = n - 1$. Si $D = \mathbb{K}a$ avec $a \notin H$, alors $\varphi(a) \neq 0$ et $H \cap D = \{0\}$; comme $\dim H + \dim D = n$, on a $E = H \oplus D$. Concrètement, $x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a\right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a$.

Propriété — équations. En dimension n , un hyperplan H admet, dans une base fixée, une **équation** $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, et deux équations d'un même hyperplan sont **proportionnelles** (de rapport non nul).

Théorème — intersections d'hyperplans. L'intersection de m hyperplans de E ($\dim E = n$) est un sous-espace de dimension $\geq n - m$. Réciproquement, tout sous-espace de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans : c'est son **système d'équations**, formé de m équations **indépendantes**.

Remarque. Dans $\mathbb{R}^2$ les hyperplans sont les droites vectorielles ($ax + by = 0$); dans $\mathbb{R}^3$ ce sont les plans vectoriels ($ax + by + cz = 0$), et une droite vectorielle est l'intersection de deux plans, donc décrite par un système de deux équations indépendantes.

8 SOUS-ESPACES AFFINES

Définition. Un **sous-espace affine** de E est une partie de la forme $\mathcal{A} = a + F = \{a + x, x \in F\}$, où $a \in E$ et F est un sous-espace vectoriel de E , appelé **direction** de $\mathcal{A}$; on pose $\dim \mathcal{A} = \dim F$. La direction est unique, et $a + F = b + F \iff b - a \in F$: tout point de $\mathcal{A}$ peut servir de point de base. Un **hyperplan affine** est un sous-espace affine de direction un hyperplan.

Remarque. Un sous-espace affine n'est un sous-espace vectoriel que s'il contient 0, c'est-à-dire si $a \in F$. L'intersection de deux sous-espaces affines est vide ou un sous-espace affine de direction $F_1 \cap F_2$: contrairement au cas vectoriel, elle peut être **vide**.

Théorème — équation linéaire. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. L'ensemble $\mathcal{S} = \{x \in E, u(x) = b\}$ est

- **vide** si $b \notin \text{Im } u$;
- le **sous-espace affine** $x_0 + \text{Ker } u$ si $b \in \text{Im } u$, où x_0 est une solution particulière.

Autrement dit : *solution générale* = *solution particulière* + *solution générale de l'équation homogène*, et $\dim \mathcal{S} = \dim \text{Ker } u$.

Remarque. Ce seul énoncé recouvre les systèmes linéaires $AX = B$, les équations différentielles $y' + ay = b$ et $y'' + by' + cy = f$, les suites arithmético-géométriques, et l'interpolation de Lagrange.

► SAVOIR-FAIRE

- Déterminer la dimension et une base d'un sous-espace donné par un système d'équations, ou par une famille génératrice (calcul d'un rang).
- Calculer $\text{Ker } u$, $\text{Im } u$, $\text{rg } u$, *contrôler* par le théorème du rang, conclure à l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité.
- Appliquer Grassmann; reconnaître une somme directe par la caractérisation dimensionnelle; construire une base adaptée.
- Reconnaître un projecteur ($p^2 = p$) ou une symétrie ($s^2 = \text{id}$), en déterminer les sous-espaces $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$, ou $\text{Ker}(s - \text{id})$ et $\text{Ker}(s + \text{id})$.
- Donner une équation, ou un système d'équations, d'un sous-espace; décrire l'ensemble des solutions de $u(x) = b$ comme sous-espace affine.

★ EXEMPLE — un calcul type, mené jusqu'au contrôle

Soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $u(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y + z, x - 2y + 2z)$. Elle est linéaire (chaque coordonnée est une forme linéaire). *Noyau* : $x + y - z = 0$ et $2x - y + z = 0$ donnent, en ajoutant, $3x = 0$ donc $x = 0$ puis $y = z$; la troisième équation est alors automatiquement vérifiée. Donc $\text{Ker } u = \text{Vect}((0, 1, 1))$ et $\dim \text{Ker } u = 1$. *Image* : $\text{Im } u = \text{Vect}((1, 2, 1), (1, -1, -2), (-1, 1, 2))$; comme $u(e_3) = -u(e_2)$ et que les deux premiers ne sont pas colinéaires, $\text{rg } u = 2$ et $\text{Im } u$ est le plan d'équation $a - b + c = 0$. *Contrôle* : $1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. *Conséquence* : $u(x) = (1, 2, 1)$ a pour solutions le sous-espace affine $(1, 0, 0) + \text{Vect}((0, 1, 1))$, alors que $u(x) = (1, 0, 0)$ n'en a aucune car $1 - 0 + 0 \neq 0$.

✗ PIÈGES

- Écrire $\dim \text{Ker } u + \text{rg } u = \dim F$: le théorème du rang porte sur $\dim E$, dimension du *départ*.
- Appliquer « injectif $\iff$ surjectif » sans l'hypothèse $\dim E = \dim F < +\infty$.
- Croire que $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$ pour tout endomorphisme : c'est vrai pour un projecteur, faux en général.
- Confondre $\text{rg } u$ et $\dim E$, ou $F \cup G$ et $F + G$; parler du *supplémentaire* de F .
- Oublier de *vérifier* la linéarité : $(x, y) \mapsto (xy, 0)$ et $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ ne sont pas linéaires.
- Confondre sous-espace affine et sous-espace vectoriel; utiliser une matrice d'application linéaire (chapitre 18).