

Fiche de cours Déterminants

Formes n -linéaires alternées, déterminant d'une famille, d'un endomorphisme, d'une matrice; calcul et comatrice

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans toute la fiche, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (chapitre 19). **L'existence du déterminant est admise**; tout le reste est démontré.

1 FORMES n -LINÉAIRES ALTERNÉES

Définition. Une application $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est **n -linéaire** si elle est linéaire en chacune de ses n variables, les autres étant fixées. Elle est **alternée** si elle s'annule dès que deux de ses variables sont égales, et **antisymétrique** si l'échange de deux variables change son signe. On note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E .

Théorème — propriétés d'une forme n -linéaire alternée. Soit $f \in \Lambda_n(E)$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

■ FORMULAIRE

- **Antisymétrie** : f est antisymétrique, et plus généralement, pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n).$$

- **Nullité sur une famille liée** : si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
- **Invariance** : f est inchangée si l'on remplace x_i par $x_i + \lambda x_j$ ($i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}$); elle est multipliée par λ si l'on remplace x_i par λx_i .

Idée de preuve (exigible). **Antisymétrie** : en développant $f(\dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots) = 0$ par bilinéarité en ces deux places, les deux termes « diagonaux » sont nuls, d'où $f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$; le cas général suit en décomposant σ en transpositions, ε étant un morphisme. **Famille liée** : si $x_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j$, la linéarité en la i -ième place donne une somme de termes ayant deux variables égales. **Invariance** : même argument, le terme $\lambda f(\dots, x_j, \dots)$ ayant deux variables égales.

Remarque. Une forme n -linéaire n'est pas linéaire : $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^n f(x_1, \dots, x_n)$. Ici « alternée » et « antisymétrique » sont équivalentes car $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (donc $2 \neq 0$).

2 DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE

Théorème — existence et unicité. Il existe une unique forme n -linéaire alternée f sur E telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$; on la note $\det_e$. De plus

$$\Lambda_n(E) = \mathbb{K} \cdot \det_e : \quad \forall f \in \Lambda_n(E), \quad f = f(e_1, \dots, e_n) \det_e.$$

L'existence est admise (elle n'est pas exigible); l'unicité et le fait que $\Lambda_n(E)$ soit une droite vectorielle se démontrent.

Idée de preuve de l'unicité (exigible). Soit $f \in \Lambda_n(E)$. En écrivant $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ et en développant par n -linéarité, on obtient une somme sur toutes les applications $\varphi : [1; n] \rightarrow [1; n]$; les termes où φ n'est pas injective ont deux variables égales, donc sont nuls, et il ne reste que les $\varphi = \sigma \in \mathfrak{S}_n$, pour lesquelles $f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n)$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j} \right) f(e_1, \dots, e_n).$$

Ainsi f est entièrement déterminée par le scalaire $f(e_1, \dots, e_n)$, ce qui donne à la fois l'unicité et $f = f(e) \det_e$.

Propriété — expression en coordonnées. Avec $x_j = \sum_i a_{ij} e_i$: $\det_e(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}$. Cette formule a $n!$ termes : elle sert à démontrer, jamais à calculer dès que $n \geq 4$.

Théorème — caractérisation des bases. $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de $E \iff \det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Idée de preuve (exigible). Si la famille est liée, $\det_e$ s'annule. Si c'est une base e' , alors $\det_{e'}$ existe et le théorème précédent appliqué à $f = \det_{e'}$ donne $\det_{e'} = \det_{e'}(e) \det_e$; en évaluant en $e' : 1 = \det_{e'}(e) \det_e(e')$, donc $\det_e(e') \neq 0$.

Propriété — changement de base. Si e et e' sont deux bases de E , alors pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$,

$$\det_{e'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_e(x_1, \dots, x_n),$$

et en particulier $\det_e(e') \times \det_{e'}(e) = 1$.

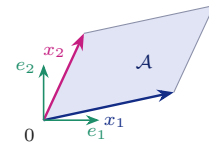


Figure 1 — $\det_e(x_1, x_2)$ est l'aire orientée $\pm A$, l'unité étant l'aire construite sur e ; en dimension 3, c'est un volume orienté.

3 DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

Définition — et théorème. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, le scalaire $\det_e(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base e choisie : on l'appelle **déterminant de u** , noté $\det u$.

Idée de preuve. $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_e(u(x_1), \dots, u(x_n))$ est n -linéaire alternée, donc $f = f(e) \det_e$; en évaluant en e' et en utilisant $\det_{e'} = \det_{e'}(e) \det_e$, on obtient $\det_{e'}(u(e'_j)) = f(e)$.

Propriété. Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

■ FORMULAIRE

- $\det_e(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_e(x_1, \dots, x_n)$;
- $\det(\text{id}_E) = 1$; $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$; $\det(v \circ u) = \det v \times \det u$;
- $u \in \text{GL}(E) \iff \det u \neq 0$, et alors $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det u}$: $\det$ est un **morphisme de groupes** de $(\text{GL}(E), \circ)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$.

Idée de preuve. La composée s'obtient en appliquant deux fois le premier point : $\det(v \circ u) \det_e(x) = \det_e(v(u(x_i))) = \det_e(v) \det_e(u(x_i)) = \det v \det u \det_e(x)$, et l'on évalue en $x = e$. Pour l'équivalence : $u \in \text{GL}(E)$ si et seulement si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base, c'est-à-dire si et seulement si $\det_e(u(e_1), \dots) = \det u \neq 0$.

Remarque. Dans une base adaptée : $\det(\lambda \text{id}_E) = \lambda^n$; un projecteur de rang r avec $0 < r < n$ a un déterminant nul; la symétrie associée à $E = F \oplus G$ a pour déterminant $(-1)^{\dim G}$.

4 DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

Définition. Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det A$ est le déterminant de la famille des *colonnes* de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$; on le note aussi entre barres verticales, et $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans une base e , alors $\det u = \det A$; si $(x_1, \dots, x_n)$ a pour matrice A dans e , alors $\det_e(x_1, \dots, x_n) = \det A$.

Théorème — propriétés. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

■ FORMULAIRE

- $\det$ est n -linéaire alternée **par rapport aux colonnes**, et aussi **par rapport aux lignes**;
- $\det({}^t A) = \det A$; $\det(AB) = \det A \times \det B$; $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$; $\det I_n = 1$;
- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$, et alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
- deux matrices **semblables** ont le même déterminant : $\det(P^{-1}AP) = \det A$.

Idée de preuve (exigible). $\det(AB)$: AB est la matrice de $u \circ v$, où u, v sont les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés, et l'on applique $\det(u \circ v) = \det u \det v$. $\det({}^t A) = \det A$: dans la somme sur $\mathfrak{S}_n$, le changement d'indice $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection, $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ et $\prod_j a_{j\sigma(j)} = \prod_i a_{\sigma^{-1}(i)i}$. Le caractère alterné en lignes s'en déduit.

✗ ATTENTION

$\det(A + B) \neq \det A + \det B$ en général : pour $A = I_2$ et $B = -I_2$, $\det(A + B) = 0$ alors que $\det A + \det B = 2$. La multiplication de toute la matrice par λ multiplie *chacune* des n colonnes par λ , d'où le facteur λ^n . Enfin $\det$ n'a aucun sens pour une matrice non carrée, et deux matrices de même déterminant n'ont aucune raison d'être semblables.

5 CALCUL PRATIQUE D'UN DÉTERMINANT

Propriété — petites tailles. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, et $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$ (**règle de Sarrus** : les

trois « diagonales descendantes » moins les trois « montantes », valable *uniquement* pour $n = 3$).

Propriété — matrice triangulaire. Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), en particulier diagonale, est le **produit de ses coefficients diagonaux**; elle est donc inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Théorème — effet des opérations élémentaires. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant D . Les trois opérations élémentaires, sur les lignes comme sur les colonnes, transforment D ainsi :

■ FORMULAIRE

- $L_i \leftrightarrow L_j$ (échange, $i \neq j$) : le déterminant devient $-D$;
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (dilatation) : le déterminant devient λD ;
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (transvection, $j \neq i$) : le déterminant **reste égal à D** .

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$), on note $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne. Le **cofacteur** de A en position (i, j) est $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Théorème — développement selon une ligne ou une colonne. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$), et pour toute colonne j et toute ligne i fixées : $\det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} c_{kj}$ (développement selon la colonne j) et $\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{ik}$ (selon la ligne i). Les signes $(-1)^{i+j}$ se disposent en damier, en commençant par $+$ en haut à gauche.

Méthode — calculer un déterminant. (1) développer selon une ligne ou une colonne riche en zéros; (2) sinon en créer par des $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (qui ne changent rien), puis développer; (3) ou trianguler par le pivot, en *comptant* les échanges et les facteurs sortis. Penser à factoriser une ligne ou une colonne, et à exploiter la structure.

6 DÉTERMINANTS CLASSIQUES

Théorème — déterminant de Vandermonde. Pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, le déterminant de la matrice $(x_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ vaut

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i),$$

qui est non nul si et seulement si les x_i sont **deux à deux distincts**.

Idée de preuve (exigible). Récurrence sur n : on effectue $L_k \leftarrow L_k - x_1 L_{k-1}$ pour k de n à 2 (dans cet ordre), ce qui met ${}^t(1, 0, \dots, 0)$ en première colonne et $x_j^{k-2}(x_j - x_1)$ en position (k, j) ; on développe selon la première colonne, puis on factorise $(x_j - x_1)$ dans chaque colonne $j \geq 2$: il reste $\prod_{j=2}^n (x_j - x_1) V(x_2, \dots, x_n)$.

Remarque — lien avec les polynômes de Lagrange. Pour des x_i distincts, $V \neq 0$ traduit que $P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$: c'est l'interpolation de Lagrange.

Propriété — déterminant tridiagonal. Si D_n est le déterminant de la matrice $n \times n$ de diagonale a , de sur-diagonale b et de sous-diagonale c (zéros ailleurs), alors, en développant selon la première colonne puis la première ligne du cofacteur obtenu,

$$\boxed{D_n = a D_{n-1} - bc D_{n-2}} \quad (n \geq 3), \quad D_1 = a, \quad D_2 = a^2 - bc.$$

On conclut avec la théorie des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Méthode — déterminant dont toutes les lignes ont la même somme. faire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$ pour faire apparaître une colonne constante, la factoriser, puis créer des zéros par $L_i \leftarrow L_i - L_1$. Exemple : le déterminant de diagonale a et de coefficients b ailleurs vaut $(a - b)^{n-1} (a + (n - 1)b)$.

7 COMATRICE ET INVERSE

Définition. La **comatrice** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) est la matrice de ses cofacteurs : $\text{Com}(A) = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Théorème. Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $A \times {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A) \times A = \det(A) I_n$. Par conséquent, si A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{Com}(A).$$

Idée de preuve (exigible). Le coefficient (i, i) de $A {}^t\text{Com}(A)$ est $\sum_j a_{ij} c_{ij} = \det A$: c'est le développement selon la ligne i . Pour $i \neq k$, le coefficient (i, k) est $\sum_j a_{ij} c_{kj}$: c'est le développement, selon la ligne k , du déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la ligne k par la ligne i — matrice ayant deux lignes égales, donc de déterminant nul.

Remarque. En taille 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donne $\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, d'où la formule connue $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Dès $n = 3$, la comatrice est un outil *théorique* : le pivot de Gauss est bien plus rapide pour inverser.

8 SYSTÈMES DE CRAMER

Définition. Un **système de Cramer** est un système linéaire $AX = B$ de n équations à n inconnues dont la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible*, c'est-à-dire $\det A \neq 0$. Il admet alors une **unique** solution.

Théorème — formules de Cramer. Si $\det A \neq 0$, l'unique solution de $AX = B$ a pour coordonnées $x_j = \frac{\det A_j^B}{\det A}$ pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, où A_j^B est obtenue en remplaçant la j -ième colonne de A par B .

Idée de preuve. Le système s'écrit $\sum_k x_k C_k = B$ (C_k : colonnes de A). En remplaçant B par cette somme dans $\det A_j^B$ et en développant par linéarité en la j -ième place, les termes $k \neq j$ ont deux colonnes égales : il reste $x_j \det A$.

Remarque. Ces formules servent à *discuter* (dépendance en un paramètre, caractère entier d'une solution), pas à calculer : un système 4×4 demanderait cinq déterminants d'ordre 4.

► SAVOIR-FAIRE

- Calculer un déterminant d'ordre 3 ou 4 (opérations élémentaires puis développement), et contrôler par une seconde méthode.
- Décider si une famille est une base, une matrice inversible, un endomorphisme un automorphisme — et discuter selon un paramètre.
- Exploiter $\det(AB) = \det A \det B$, $\det {}^tA = \det A$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, $\det(A^{-1}) = 1/\det A$ et l'invariance par similitude.
- Calculer un déterminant d'ordre n : structure remarquable, factorisation, ou relation de récurrence (cas tridiagonal).
- Écrire la comatrice, vérifier $A {}^t\text{Com}(A) = \det(A) I_n$, en déduire A^{-1} ; résoudre un système de Cramer.

★ EXEMPLE — un déterminant d'ordre 4, mené jusqu'au contrôle

On crée des zéros dans la première colonne sans changer D ($L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$), on développe selon cette colonne (signe +), puis on recommence ($L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$) :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -1 \times (15 - 1) = -14.$$

Contrôle par Sarrus sur le déterminant d'ordre 3 : $-2 - 2 - 2 - 8 + 1 - 1 = -14$. ✓ Comme $D \neq 0$, la matrice est inversible.

✗ PIÈGES

- Écrire $\det(A + B) = \det A + \det B$, ou oublier l'exposant dans $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- Se tromper de signe dans un cofacteur : il vaut $(-1)^{i+j}$, en damier à partir de + en $(1, 1)$.
- Croire que $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ne change rien, ou oublier le -1 d'un échange de lignes.
- Écrire $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)$ sans transposer ; appliquer Sarrus en taille 4.