

Fiche de cours Dérivabilité et convexité

Rolle, accroissements finis, limite de la dérivée, classes C^k , fonctions convexes

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

Dans toute la fiche, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et f une fonction définie sur I , à valeurs réelles sauf mention contraire.

1 DÉRIVABILITÉ EN UN POINT

Définition. Soit $a \in I$. Le **taux d'accroissement** de f en a est $\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, défini sur $I \setminus \{a\}$. On dit que f est **dérivable en a** lorsque τ_a admet une limite finie en a ; cette limite est le **nombre dérivé** $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$, soit encore $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Théorème — caractérisation par un développement limité d'ordre 1. f est dérivable en a de nombre dérivé ℓ si et seulement s'il existe ε de limite nulle en 0 telle que $f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h)$ pour tout h tel que $a+h \in I$.

Propriété — dérivabilité $\implies$ continuité. Si f est dérivable en a , elle est continue en a . La réciproque est fautive : $x \mapsto |x|$ en 0. *Idée de preuve (exigible) :* $f(x) - f(a) = (x-a)\tau_a(x) \rightarrow 0 \times f'(a) = 0$.

Définition. f est **dérivable à droite** (resp. **à gauche**) en a si τ_a a une limite finie à droite (resp. à gauche) en a ; on la note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$). Si a est intérieur à I : f est dérivable en $a \iff f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et sont égales.

Notation — interprétations. Si f est dérivable en a , la courbe admet au point $A(a; f(a))$ une **tangente** d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, position limite des sécantes (AM) quand $M \rightarrow A$. Si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et diffèrent, A est un **point anguleux** (deux demi-tangentes). Si $|\tau_a(x)| \rightarrow +\infty$, la courbe admet en A une **tangente verticale**. En cinématique, $f'(t)$ est la vitesse instantanée.

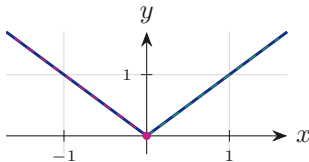


Fig. 1 — Point anguleux : $|x|$ en 0, $f'_g = -1 \neq 1 = f'_d$.

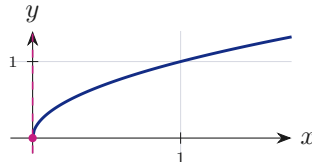


Fig. 2 — Tangente verticale : $\sqrt{x}$ en 0.

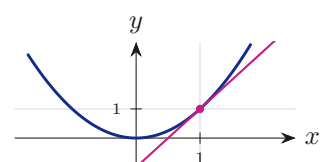


Fig. 3 — Tangente : x^2 en 1.

2 OPÉRATIONS. DÉRIVÉE D'UNE RÉCIPROQUE

Théorème. Soient f, g dérivables en a et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$; si $g(a) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$. Enfin, si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, la **composée** $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Théorème — dérivée d'une réciproque. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone, donc bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$; soient $a \in I$ et $b = f(a)$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b : tangente verticale. En particulier, si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas, f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. Les deux courbes étant symétriques par rapport à la droite $y = x$, les pentes m et $\frac{1}{m}$ se correspondent, et une tangente horizontale devient verticale.

3 EXTREMUM LOCAL ET POINT CRITIQUE

Définition. f admet un **maximum local** en $a \in I$ s'il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I \cap [a - \eta; a + \eta]$; de même pour un **minimum local**. Un **point critique** est un point où f' s'annule.

Théorème — condition nécessaire d'extremum. Si a est intérieur à I , si f est dérivable en a et si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$. *Idée de preuve :* pour un maximum local, $\tau_a(x) \geq 0$ si $x < a$ et $\tau_a(x) \leq 0$ si $x > a$ (proches de a) ; le passage à la limite donne $f'(a) \geq 0$ et $f'(a) \leq 0$.

✖ **ATTENTION** — Les deux erreurs à ne pas commettre

La condition est **nécessaire, non suffisante** : $x \mapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ sans extremum en 0. Et « a intérieur » est **indispensable** : $f(x) = x$ sur $[0; 1]$ atteint son maximum en 1 avec $f'(1) = 1 \neq 0$. Pour chercher les extremums sur un segment, on examine les points critiques et les deux bornes.

4 THÉORÈME DE ROLLE ET ACCROISSEMENTS FINIS

Théorème — Rolle. Soient $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Idée de preuve (exigible). f continue sur le segment $[a; b]$ y atteint ses bornes m et M (théorème des bornes atteintes). Si $m = M$, f est constante et tout c convient. Sinon, comme $f(a) = f(b)$ ne peut valoir à la fois m et M , l'une des bornes est atteinte en un point c intérieur : f y a un extremum local, donc $f'(c) = 0$.

Théorème — égalité des accroissements finis (EAF). Sous les mêmes hypothèses de continuité et de dérivabilité (sans supposer $f(a) = f(b)$), il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. *Idée de preuve (exigible) :* appliquer Rolle à $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, qui vérifie $g(a) = g(b) = 0$.

Remarque. Géométriquement, il existe un point où la tangente est parallèle à la corde ; en cinématique, la vitesse instantanée égale au moins une fois la vitesse moyenne. Le réel c n'est en général ni unique ni calculable : l'EAF est un théorème d'existence.

Théorème — inégalité des accroissements finis (IAF). Si f est dérivable sur I avec $|f'| \leq K$, alors $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ pour tous $x, y \in I$: f est K -lipschitzienne. Plus précisément, si $m \leq f' \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Définition. f est **lipschitzienne** sur I s'il existe $K \geq 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ pour tous $x, y \in I$; une telle fonction est continue. La réciproque de l'IAF est fautive : $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[1; +\infty[$ mais pas sur $[0; 1]$, où sa dérivée n'est pas bornée.

Méthode — suites $u_{n+1} = f(u_n)$. si $J \subset I$ est stable par f et contient u_0 , si $\ell \in J$ vérifie $f(\ell) = \ell$ et si $|f'| \leq K$ sur J , l'IAF donne $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq K|u_n - \ell|$, d'où par récurrence $|u_n - \ell| \leq K^n|u_0 - \ell|$. Si $K < 1$, alors $u_n \rightarrow \ell$ à vitesse géométrique. Les trois vérifications — stabilité, point fixe, majoration de $|f'|$ — sont indispensables.

5 MONOTONIE ET THÉORÈME DE LA LIMITE DE LA DÉRIVÉE

Théorème — caractérisation de la monotonie. Soit f dérivable sur un intervalle I . Alors : f constante $\iff f' = 0$; f croissante $\iff f' \geq 0$; f décroissante $\iff f' \leq 0$; f strictement croissante $\iff f' \geq 0$ et $\{f' = 0\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide. En particulier $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points entraîne la stricte croissance. *Idée de preuve :* le sens direct par le signe de τ_a , la réciproque par l'EAF entre deux points $x < y$.

✖ **ATTENTION**

Le mot **intervalle** est essentiel : sur $\mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée < 0 sans être décroissante ($f(-1) = -1 < 1 = f(1)$). Et la stricte croissance n'exige pas $f' > 0$ partout : $x \mapsto x^3$ est strictement croissante avec $f'(0) = 0$.

Théorème — limite de la dérivée. Soient $a \in I$ et f continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

- Si $\ell \in \mathbb{R}$: f est dérivable en a , $f'(a) = \ell$, et f' est continue en a .
- Si $\ell = \pm\infty$: f n'est pas dérivable en a et sa courbe y admet une tangente verticale.

Idée de preuve (exigible). Soit $x \in I \setminus \{a\}$: f est continue sur le segment d'extrémités a et x , dérivable à l'intérieur, donc l'EAF fournit c_x strictement entre a et x avec $\tau_a(x) = f'(c_x)$. Comme $|c_x - a| \leq |x - a|$, on a $c_x \rightarrow a$, donc $\tau_a(x) \rightarrow \ell$ par composition de limites.

✖ **ATTENTION**

C'est une **condition suffisante** : si f' n'a pas de limite en a , on ne peut rien conclure. Ainsi $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (et $f(0) = 0$) est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$, alors que f' n'a pas de limite en 0. Le théorème sert à démontrer la dérivabilité en a , jamais à affirmer que f' a une limite.

6 CLASSES C^k ET FORMULE DE LEIBNIZ

Définition. On pose $f^{(0)} = f$ et $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ tant que cela a un sens. Pour $k \in \mathbb{N}$, f est de classe C^k sur I si f est k fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue; f est C^∞ si elle est C^k pour tout k . Les inclusions $C^\infty(I) \subset \dots \subset C^1(I) \subset C^0(I)$ sont strictes.

Théorème — opérations. $C^k(I)$ est stable par combinaison linéaire et par produit; $\frac{f}{g} \in C^k$ si g ne s'annule pas; $g \circ f \in C^k$ si $f \in C^k(I)$, $f(I) \subset J$ et $g \in C^k(J)$; si $f \in C^k(I)$ ($k \geq 1$) est bijective sur J et si f' ne s'annule pas, $f^{-1} \in C^k(J)$. Les démonstrations relatives à la composée et à la réciproque ne sont pas exigibles.

Théorème — formule de Leibniz. Si f et g sont n fois dérivables sur I , alors fg l'est et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Idée de preuve (exigible) : récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant la dérivée d'un produit; l'hérédité regroupe les termes grâce à la relation de Pascal $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ — c'est le mécanisme de la formule du binôme.

Méthode — dérivée n -ième. chercher un produit d'un polynôme de degré petit par une fonction dont on connaît toutes les dérivées : la somme de Leibniz est alors finie. Sinon, calculer f' , f'' , f''' , conjecturer, démontrer par récurrence.

Propriété — formulaire. $(e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$); $\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-\alpha)^{n+1}}$; $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$ ($n \geq 1$); $(x^m)^{(n)} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$ si $n \leq m$ et 0 si $n > m$; $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$, $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$.

7 FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

Définition. $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en a si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont, et alors $f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i(\operatorname{Im} f)'(a)$; c'est équivalent à l'existence dans $\mathbb{C}$ de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Les classes C^k se définissent de même. Les formules de dérivation d'une combinaison linéaire (à coefficients complexes), d'un produit, d'un quotient et la formule de Leibniz restent valables, et $(e^\varphi)' = \varphi' e^\varphi$ pour $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable.

✖ ATTENTION — Rolle et l'EAF sont faux dans $\mathbb{C}$

Pour $f : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = e^{it}$: f est C^∞ et $f(0) = f(2\pi) = 1$, mais $f'(t) = ie^{it}$ ne s'annule jamais ($|f'| = 1$). Seule l'**IAF** subsiste : si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 avec $|f'| \leq K$, alors $|f(b) - f(a)| \leq K(b-a)$ (majoration de $\left| \int_a^b f' \right|$).

8 FONCTIONS CONVEXES

Définition. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si $\forall (x, y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0; 1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$; elle est **concave** si $-f$ est convexe. Géométriquement : sur $[x; y]$, la courbe est en dessous de la corde joignant les points d'abscisses x et y .

Théorème — inégalité de Jensen. Si f est convexe sur I , pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ de somme 1 :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Idée de preuve (exigible). Récurrence sur n : si $\lambda_{n+1} \neq 1$, écrire $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}$ avec $y = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i \in I$, appliquer la définition puis l'hypothèse de récurrence à y .

Théorème — croissance des pentes. f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $a \in I$, la pente $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$. D'où l'**inégalité des trois pentes** : pour $x < y < z$ dans I ,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Théorème — cas dérivable. Soit f dérivable sur I . Sont équivalents : (i) f est convexe; (ii) f' est croissante sur I ; (iii) la courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ pour tous $a, x \in I$. Si f est deux fois dérivable : f convexe $\iff f'' \geq 0$ sur I .

Idée de preuve de (i) $\Rightarrow$ (iii) (exigible). Par croissance des pentes, pour $x > a$: $\tau_a(x) \geq \lim_{t \rightarrow a^+} \tau_a(t) = f'(a)$, d'où $f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a)$; pour $x < a$ l'inégalité entre pentes est inversée, mais $x - a < 0$ la retourne : même conclusion.

Notation. À retenir : une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes. Cela fournit deux familles d'inégalités, l'une locale (tangentes), l'autre globale (cordes, Jensen).

Définition. Soit f dérivable sur I et a intérieur à I . Le point $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** si f change de convexité en a ; la courbe y traverse sa tangente. Si f est deux fois dérivable, cela équivaut à un **changement de signe** de f'' en a ; en particulier $f''(a) = 0$, condition nécessaire non suffisante ($x \mapsto x^4$ en 0).

■ FORMULAIRE — Inégalités de convexité à connaître

- $\exp$ convexe sur $\mathbb{R} : e^x \geq 1 + x$ (tangente en 0), égalité ssi $x = 0$. $\ln$ concave sur $\mathbb{R}_+^* : \ln x \leq x - 1$ et $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$.
- Concavité de $\ln$ et Jensen : $\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ pour $x_i > 0, \lambda_i \geq 0$ de somme 1 ; avec $\lambda_i = \frac{1}{n}$, l'inégalité arithmético-géométrique $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.
- $\sin$ concave sur $[0; \pi] : \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ (corde et tangente). Pour $\alpha \geq 1, x \mapsto x^\alpha$ convexe sur $\mathbb{R}_+ : (x+y)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha)$.

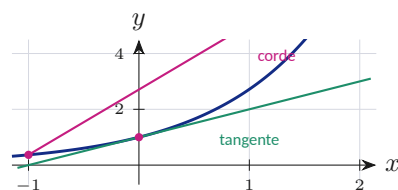


Fig. 4 — $\exp$ est convexe : sous ses cordes, au-dessus de ses tangentes.

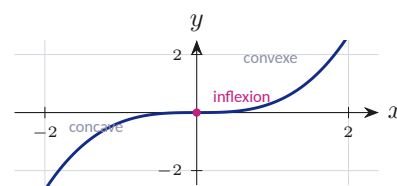


Fig. 5 — $x \mapsto \frac{x^3}{3}$: inflexion en 0, où f'' change de signe.

► SAVOIR-FAIRE

- Étudier la dérivabilité en un point par le taux d'accroissement ; calculer $f'_g(a), f'_d(a)$; conclure (dérivable, point anguleux, tangente verticale).
- Montrer qu'une fonction définie par morceaux est C^1 (ou C^k) au point de raccord par le théorème de la limite de la dérivée.
- Appliquer Rolle à une fonction auxiliaire ($e^{-\lambda x} f(x), f(x)g(b) - f(b)g(x)$, une primitive...) pour produire un zéro ; encadrer $f(b) - f(a)$ par l'EAF ou l'IAF.
- Montrer qu'une fonction est lipschitzienne, en déduire la convergence de $u_{n+1} = f(u_n)$ et une majoration de l'erreur.
- Calculer une dérivée n -ième (Leibniz ou récurrence) ; démontrer une inégalité par convexité (tangente, corde, Jensen).

★ EXEMPLE — trois gestes types

- **Classe C^1 par recollement.** $f(x) = x^2 \ln x$ pour $x > 0, f(0) = 0$: f est continue en 0 (croissances comparées) et $f'(x) = 2x \ln x + x \rightarrow 0$, donc par le théorème de la limite de la dérivée f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ et $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$.
- **Rolle avec fonction auxiliaire.** f dérivable sur $[0; 1], f(0) = f(1) = 0$: $g(x) = e^{-x} f(x)$ vérifie $g(0) = g(1) = 0$, donc il existe $c \in]0; 1[$ avec $g'(c) = e^{-c}(f'(c) - f(c)) = 0$, soit $f'(c) = f(c)$.
- **Inégalité par tangente.** $\ln$ est concave, sa tangente en 1 est $y = x - 1$: $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$, avec égalité ssi $x = 1$ (car $\ln'' < 0$).

✗ PIÈGES

- Appliquer Rolle sans $f(a) = f(b)$, ou sans la continuité sur le fermé $[a; b]$ (la fonction nulle en 0 et égale à 1 sur $]0; 1]$ le montre).
- Croire que $f'(a) = 0$ entraîne un extremum ; chercher un extremum au bord avec la condition de point critique.
- Confondre « $f' > 0$ » (suffisant) et « f strictement croissante » ; oublier que la caractérisation de la monotonie exige un intervalle.
- Utiliser le théorème de la limite de la dérivée à l'envers, en affirmant que f' a une limite en a : c'est l'hypothèse, jamais la conclusion.
- Invoquer $f'' \geq 0$ sans avoir établi que f est deux fois dérivable ; écrire Jensen avec des poids négatifs ou de somme $\neq 1$.
- Appliquer Rolle ou l'EAF à une fonction à valeurs complexes ; conclure à un point d'inflexion à partir de $f''(a) = 0$ sans changement de signe.