

Fiche de cours

Dénombrement

Cardinal d'un ensemble fini, opérations sur les cardinaux, listes, arrangements, permutations, combinaisons

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

1 ENSEMBLES FINIS ET CARDINAL

Définition. Un ensemble E est **fini** s'il est vide, ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ sur E . Cet entier n est alors unique : on l'appelle le **cardinal** de E et on le note $\text{Card } E$ ou $|E|$, avec la convention $\text{Card } \emptyset = 0$. Un ensemble qui n'est pas fini est dit **infini**.

Remarque. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme : l'unicité de n ci-dessus, ainsi que les propriétés les plus intuitives de ce chapitre, sont admises. Ce qui est en revanche exigible, c'est de savoir compter : reconnaître l'objet que l'on dénombre, choisir le bon modèle, et rédiger le comptage.

Propriété — parties d'un ensemble fini. Soit E un ensemble fini et $A \subset E$. Alors A est fini et

$$\text{Card } A \leq \text{Card } E, \quad \text{avec} \quad \text{Card } A = \text{Card } E \iff A = E.$$

Réciproquement, si E est infini, E possède des parties finies de cardinal arbitrairement grand.

Théorème — cas d'égalité des cardinaux. Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f : E \rightarrow F$. Alors

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

✖ ATTENTION — les deux hypothèses sont indispensables

- **Même cardinal :** $f : \llbracket 1 ; 2 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1 ; 3 \rrbracket, x \mapsto x$, est injective sans être surjective.
- **Finitude :** $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$, est injective sans être surjective ; $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \max(n - 1, 0)$, est surjective sans être injective. Le théorème est **faux** pour les ensembles infinis.

2 OPÉRATIONS SUR LES CARDINAUX

Théorème — principe d'addition. Si A et B sont deux ensembles finis *disjoints* ($A \cap B = \emptyset$), alors $A \cup B$ est fini et $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$. Plus généralement, si E est fini et si $(A_1, \dots, A_p)$ est une **partition** de E (parties non vides, deux à deux disjointes, de réunion E), alors

$$\text{Card } E = \sum_{i=1}^p \text{Card } A_i$$

Propriété — complémentaire et différence. Soient E fini et $A, B \subset E$. Alors

$$\text{Card}(E \setminus A) = \text{Card } E - \text{Card } A, \quad \text{Card}(A \setminus B) = \text{Card } A - \text{Card}(A \cap B).$$

Théorème — cardinal d'une réunion quelconque. Pour A et B finis,

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$$

Idée de preuve (exigible). $A \cup B$ est la réunion disjointe de A et de $B \setminus A$, donc $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card}(B \setminus A) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$ par la propriété précédente.

✖ ATTENTION

La formule du crible est hors programme : on ne dispose d'aucune formule à connaître pour $\text{Card}(A \cup B \cup C)$. Avec trois ensembles ou plus, on revient à une *partition* explicite, ou l'on applique deux fois la formule ci-dessus en regroupant $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$.

Théorème — principe multiplicatif. Si $A_1, \dots, A_p$ sont finis, alors $A_1 \times \dots \times A_p$ est fini et

$$\text{Card}(A_1 \times \dots \times A_p) = \prod_{i=1}^p \text{Card } A_i \quad \text{en particulier} \quad \text{Card}(E^p) = (\text{Card } E)^p.$$

Méthode — dénombrer par choix successifs. si un objet se construit par p choix successifs, le i -ième offrant n_i possibilités *quelles que soient* les réponses aux précédents, et si deux suites de choix distinctes donnent des objets distincts, alors il y a $n_1 n_2 \dots n_p$ objets. C'est le principe multiplicatif; la clause « *quelles que soient* les réponses aux précédents » est celle que l'on oublie.

3 APPLICATIONS, PARTIES, LISTES

Notation. Pour E et F deux ensembles, $\mathcal{F}(E, F)$ (noté aussi F^E) désigne l'ensemble des applications de E dans F . Une **p -liste** (ou **p -uplet**) d'éléments de E est un élément de E^p ; c'est la même chose qu'une application de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans E .

Théorème — nombre d'applications. Soient E et F finis, $\text{Card } E = p$ et $\text{Card } F = n$. Alors

$$\text{Card } \mathcal{F}(E, F) = n^p = (\text{Card } F)^{\text{Card } E}$$

En particulier, le nombre de p -listes d'éléments d'un ensemble à n éléments est n^p .

Idée de preuve (exigible). En notant $E = \{x_1, \dots, x_p\}$, l'application $f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_p))$ permet d'identifier $\mathcal{F}(E, F)$ et F^p : se donner f , c'est se donner *indépendamment* les p images, soit n choix pour chacune. On conclut par le principe multiplicatif. (On peut aussi raisonner par récurrence sur p .)

Théorème — nombre de parties. Si E est fini de cardinal n , alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$$

Idée de preuve (exigible). L'application $A \mapsto \mathbf{1}_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{F}(E, \{0; 1\})$ (chapitre 2), ensemble de cardinal 2^n par le théorème précédent. Autrement dit: choisir une partie, c'est décider pour chacun des n éléments s'il y appartient ou non, soit 2 choix indépendants répétés n fois.

4 LISTES D'ÉLÉMENTS DISTINCTS, INJECTIONS, PERMUTATIONS

Définition. Une **p -liste d'éléments distincts** de E (on dit aussi un **arrangement** de p éléments de E) est un p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ dont les composantes sont deux à deux distinctes.

Théorème. Soit E fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Le nombre de p -listes d'éléments distincts de E vaut

$$n(n-1) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{si } p \leq n, \quad 0 \quad \text{si } p > n.$$

C'est aussi le nombre d'applications **injectives** d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n .

Idée de preuve (exigible). On construit la liste par choix successifs: n possibilités pour x_1 , puis $n-1$ pour x_2 (toutes sauf x_1), ..., puis $n-p+1$ pour x_p — et ce nombre de possibilités à la i -ième étape ne dépend pas des choix précédents, seulement de leur nombre. Si $p > n$, il n'existe aucune injection d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n (sinon $p = \text{Card } f(E) \leq n$).

Propriété — permutations. Une **permutation** de E est une bijection de E sur E . Si $\text{Card } E = n$, le nombre de permutations de E est $n!$ (cas $p = n$ ci-dessus: une n -liste d'éléments distincts de E énumère E tout entier). On retrouve $\text{Card } \mathfrak{S}_n = n!$ du chapitre 19.

Remarque. Le nombre d'arrangements est parfois noté A_n^p ; cette notation ne figure pas au programme et il est préférable d'écrire $\frac{n!}{(n-p)!}$.

5 COMBINAISONS ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

Définition. Soit E fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Une **p -combinaison** de E est une *partie* de E à p éléments. On note $\mathcal{P}_p(E) = \{A \in \mathcal{P}(E), \text{Card } A = p\}$.

Théorème — le résultat central du chapitre. Pour E fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$,

$$\text{Card } \mathcal{P}_p(E) = \binom{n}{p}$$

c'est-à-dire $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$, et 0 si $p > n$.

Idée de preuve (exigible) : on compte les p -listes d'éléments distincts de deux façons. Supposons $0 \leq p \leq n$ et notons $N = \text{Card } \mathcal{P}_p(E)$. Construire une p -liste d'éléments distincts, c'est choisir l'ensemble A de ses composantes (une partie à p éléments : N choix), puis l'ordre dans lequel on les énumère (une permutation de A : $p!$ choix). Par le principe multiplicatif, le nombre de p -listes d'éléments distincts vaut $N \times p!$; or il vaut $\frac{n!}{(n-p)!}$, d'où $N = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Si $p > n$, aucune partie de E n'a p éléments et $\binom{n}{p} = 0$.

Propriété — interprétations combinatoires. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$.

■ FORMULAIRE

- **Symétrie :** $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ — à chaque partie à p éléments correspond son complémentaire, à $n - p$ éléments.
- **Relation de Pascal :** $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ — on fixe $a \in E$ et l'on partage $\mathcal{P}_p(E)$ selon que $a \in A$ ou $a \notin A$.
- **Somme d'une ligne :** $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$ — on partage $\mathcal{P}(E)$ selon le cardinal.
- **Formule du binôme :** $(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$ (chapitre 3) — en développant le produit de n facteurs $(a + b)$, un terme du développement est le choix, pour chacun des n facteurs, de a ou de b ; les termes égaux à $a^p b^{n-p}$ correspondent au choix de la partie à p éléments des facteurs où l'on prend a .

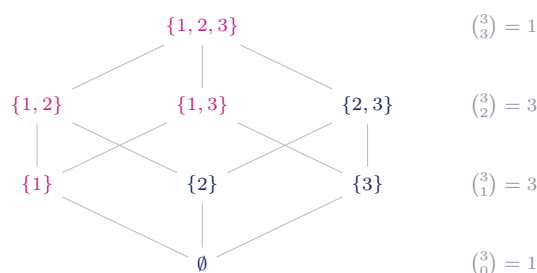


Figure 1 — Les $2^3 = 8$ parties de $\{1, 2, 3\}$, rangées par cardinal : $1 + 3 + 3 + 1 = 8$. En couleur, celles qui contiennent 1. À cardinal 2, il y en a $\binom{2}{1} = 2$ qui contiennent 1 et $\binom{2}{2} = 1$ qui ne le contient pas : c'est la relation de Pascal $\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$.

✗ ATTENTION — les cas limites

$\binom{n}{0} = 1$: il y a exactement une partie à 0 élément, $\emptyset$ — et une seule 0-liste, la liste vide. $\binom{n}{p} = 0$ dès que $p > n$ ou $p < 0$: ne jamais écrire $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ dans ce cas, $(n-p)!$ n'a pas de sens. Enfin $\binom{n}{p}$ compte des parties : la réponse à un dénombrement ne peut pas être un nombre non entier.

6 LES MODÈLES DE TIRAGE

On tire p objets dans une urne contenant n boules numérotées (donc discernables). Le tableau suivant donne le nombre de résultats possibles selon le protocole ; identifier le bon modèle est le premier réflexe de tout exercice.

Protocole	L'ordre compte ?	Objet dénombré	Nombre
successifs avec remise	oui	p -liste de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$	n^p
successifs sans remise	oui	p -liste d'éléments distincts	$\frac{n!}{(n-p)!}$
simultanés	non	partie à p éléments	$\binom{n}{p}$

Méthode — compter par le complémentaire. pour dénombrer les objets vérifiant « au moins un ... », il est presque toujours plus court de compter tous les objets, puis de retirer ceux qui vérifient « aucun ... » : $\text{Card } A = \text{Card } E - \text{Card } (E \setminus A)$.

Méthode — compter par partition. pour dénombrer un ensemble E difficile à décrire, trouver un paramètre (le cardinal, le plus petit élément, la valeur en un point fixé...), partitionner E selon ce paramètre, compter chaque classe, puis sommer.

Méthode — double comptage. pour établir une identité, dénombrer *un même ensemble* de deux façons différentes; les deux résultats sont alors égaux. C'est exactement ce que l'on a fait pour $\binom{n}{p}$, et ce que l'on fait pour Pascal et pour le binôme.

► SAVOIR-FAIRE

- Reconnaître le modèle : liste ou partie ? avec ou sans répétition ? Donner *l'ensemble* que l'on dénombre avant de calculer.
- Utiliser $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$, le passage au complémentaire, une partition.
- Compter des applications, des injections, des permutations, des parties, des parties à p éléments.
- Démontrer par dénombrement la symétrie des coefficients binomiaux, la relation de Pascal, la formule du binôme.
- Mener un double comptage pour établir une identité, en nommant l'ensemble compté de deux façons.

★ EXEMPLE — trois comptages types

- *Un code.* Les codes de 4 chiffres sont les 4-listes de $\llbracket 0; 9 \rrbracket$: il y en a $10^4 = 10\,000$. Ceux à chiffres deux à deux distincts sont les 4-listes d'éléments distincts : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$. Ceux comportant *au moins* deux chiffres égaux : $10\,000 - 5040 = 4960$ (complémentaire).
- *Un comité.* Dans un groupe de 12 personnes dont 5 femmes, les comités de 4 personnes sont les parties à 4 éléments : $\binom{12}{4} = 495$. Ceux comportant exactement 2 femmes : on choisit 2 femmes parmi 5 et 2 hommes parmi 7, soit $\binom{5}{2} \binom{7}{2} = 10 \times 21 = 210$ (principe multiplicatif).
- *Une réunion.* Parmi $\llbracket 1; 100 \rrbracket$, il y a 50 multiples de 2, 33 multiples de 3 et 16 multiples de 6; donc $50 + 33 - 16 = 67$ entiers divisibles par 2 ou par 3, et $100 - 67 = 33$ divisibles par aucun des deux.

✗ PIÈGES

- Compter en ordonnant quand l'ordre ne compte pas (on trouve $p!$ fois trop) — ou l'inverse.
- Appliquer le principe multiplicatif alors que le nombre de choix à une étape *dépend* des choix précédents.
- Invoquer une « formule du crible » pour trois ensembles : *elle est hors programme*. Revenir à une partition.
- Oublier les cas limites $p = 0$ et $p > n$, ou écrire $(n - p)!$ pour $p > n$.
- Confondre $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$ et $\text{Card } E = n$; écrire $\mathcal{P}(E)$ là où l'on veut dire E .
- Compter deux fois le même objet (comptage non injectif) : il faut toujours pouvoir dire *pourquoi* deux suites de choix distinctes donnent des objets distincts.
- Croire qu'un résultat de dénombrement peut être négatif ou non entier : le vérifier est un contrôle gratuit.