

Fiche de cours

Analyse asymptotique

Relations de comparaison, développements limités, développements asymptotiques

définitions · théorèmes et hypothèses · méthodes · démonstrations exigibles

1 RELATIONS DE COMPARAISON : LE CADRE

Notation. Dans tout ce bloc, $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et f, g sont définies au voisinage de a , sauf peut-être en a , avec g qui ne s'annule pas sur un voisinage de a privé de a : c'est cette hypothèse qui donne un sens au quotient $\frac{f}{g}$, sur lequel portent toutes les définitions qui suivent.

Définition. Soient f et g comme ci-dessus. On dit que f est **dominée** par g en a , noté $f(x) = O(g(x))$, lorsque $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a ; **négligeable** devant g en a , noté $f(x) = o(g(x))$, lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$; **équivalente** à g en a , noté $f(x) \sim_a g(x)$, lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

Propriété — liens entre les trois relations. $f = o(g) \implies f = O(g)$; $f \sim g \implies f = O(g)$ et $g = O(f)$; et surtout $f \sim_a g \iff f - g = o_a(g) \iff f = g + o_a(g)$. C'est cette deuxième forme qui sert dans les calculs : « f vaut g , à un terme négligeable devant g près ».

Propriété — propriétés conservées par équivalence. Si $f \sim_a g$, alors f et g ont la même limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, et le même signe strict au voisinage de a (car $\frac{f}{g} \geq \frac{1}{2} > 0$ près de a). En revanche $f \sim g$ n'entraîne pas $f - g \rightarrow 0$: $n^2 + n \sim n^2$ alors que la différence tend vers $+\infty$.

Propriété — règles de manipulation. Soient $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ en a , et $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ FORMULAIRE

- $\sim$ est réflexive, symétrique, transitive; **produit, quotient** : $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$; **puissance** : si $f_1 > 0$ et $g_1 > 0$ près de a , $f_1^\alpha \sim g_1^\alpha$;
- calcul sur les o : $o(g) + o(g) = o(g)$, $\lambda o(g) = o(g)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $h \cdot o(g) = o(hg)$, $o(o(g)) = o(g)$, $O(o(g)) = o(g)$; et si $f \sim g$, alors $o(f) = o(g)$ et $O(f) = O(g)$: on peut remplacer une fonction par un équivalent à l'intérieur d'un o ;
- équivalent par encadrement** : si $f \leq h \leq g$ au voisinage de a , avec $f > 0$ et $f \sim g$, alors $h \sim f$ (car $1 \leq \frac{h}{f} \leq \frac{g}{f} \rightarrow 1$).

✗ ATTENTION — les trois opérations interdites

Seuls les produits, quotients et puissances se comportent bien.

- On n'additionne pas des équivalents** : $n + 1 \sim n$ et $-n \sim -n$, mais $(n + 1) + (-n) = 1$ n'est pas équivalent à 0 (qui n'a d'ailleurs pas d'équivalent).
- On ne compose pas un équivalent** : $n + 1 \sim n$ mais $e^{n+1} = e \cdot e^n \not\sim e^n$; $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ mais $\ln(1 + \frac{1}{n}) \not\sim \ln 1 = 0$.
- On ne remplace pas un terme par un équivalent dans une somme** : de $\sin x \sim x$ on ne tire rien sur $\sin x - x$ (qui vaut $-\frac{x^3}{6} + o(x^3)$). Dès qu'il y a compensation, il faut un DL.

Théorème — croissances comparées. Soient $\alpha > 0, \beta > 0$: le logarithme perd contre toute puissance, toute puissance perd contre l'exponentielle. En $+\infty$: $(\ln x)^\alpha = o(x^\beta)$ et $x^\alpha = o(e^{\beta x})$. En 0^+ : $x^\beta |\ln x|^\alpha \rightarrow 0$. En $-\infty$: $|x|^\alpha e^x \rightarrow 0$. Pour les suites, avec $q > 1$: $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$, $n^\alpha = o(q^n)$ et $q^n = o(n!)$.

2 RELATIONS DE COMPARAISON : LE CAS DES SUITES

Définition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites, (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On reprend mot pour mot les définitions précédentes avec $n \rightarrow +\infty$: $u_n = O(v_n)$ si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée, $u_n = o(v_n)$ si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$, $u_n \sim v_n$ si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$. Toutes les propriétés du bloc précédent — liens, conservation de la limite et du signe, règles de manipulation, interdits — restent valables telles quelles.

Méthode — équivalent d'une suite. factoriser par le terme dominant, puis se ramener à une variable qui tend vers 0 pour appliquer un équivalent usuel : $\frac{3n^3-n+5}{2n^3+n^2} = \frac{n^3(3-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3})}{n^3(2+\frac{1}{n})} \sim \frac{3}{2}$, et $\sqrt{n^2+n} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \sim n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ (avec $h = \frac{1}{n}$ et $\sqrt{1+h} - 1 \sim \frac{h}{2}$).

Propriété — équivalents usuels en 0. Pour $u \rightarrow 0$ (donc aussi pour $u = u_n \rightarrow 0$, ou $u = \varphi(x) \rightarrow 0$) :

■ FORMULAIRE

$$\begin{aligned} \sin u \sim u, \quad \tan u \sim u, \quad \arctan u \sim u, \quad \operatorname{sh} u \sim u, \quad \ln(1+u) \sim u, \quad e^u - 1 \sim u, \\ 1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}, \quad \operatorname{ch} u - 1 \sim \frac{u^2}{2}, \quad (1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u \ (\alpha \neq 0). \end{aligned}$$

Chacun se lit sur le développement limité correspondant : le premier terme non nul d'un DL est un équivalent.

3 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Définition. Soient I un intervalle, $a \in I$, f définie sur I et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en a** (un $DL_n(a)$) s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour h voisin de 0 avec $a+h \in I$,

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n), \quad \text{soit encore} \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

Le polynôme $\sum a_k h^k$ est la **partie régulière** du développement.

Théorème — unicité des coefficients. Si f admet un $DL_n(a)$, les coefficients $a_0, \dots, a_n$ sont *uniques*.

Idée de preuve (exigible). Par différence, il suffit de montrer que si $\sum_{k=0}^n c_k h^k = o(h^n)$ quand $h \rightarrow 0$, alors tous les c_k sont nuls. Sinon, soit p le plus petit indice tel que $c_p \neq 0$: en divisant par h^p , on obtient $c_p + c_{p+1}h + \dots \rightarrow c_p$ d'une part, et $\frac{o(h^n)}{h^p} = o(h^{n-p}) \rightarrow 0$ d'autre part, donc $c_p = 0$: contradiction.

Propriété — conséquences immédiates. **Troncature** : si f admet un $DL_n(a)$, elle admet un $DL_p(a)$ pour tout $p \leq n$, obtenu en tronquant la partie régulière. **Parité** : si f est paire (resp. impaire) au voisinage de 0, son $DL_n(0)$ ne contient que des puissances paires (resp. impaires). **Ordres 0 et 1** : f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a (et alors $a_0 = f(a)$), un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a , et alors $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$.

✗ ATTENTION

L'existence d'un $DL_n(a)$ avec $n \geq 2$ n'entraîne **pas** que f soit n fois dérivable : pour $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ (prolongée par $f(0) = 0$), $f(x) = o(x^2)$ donne un $DL_2(0)$ nul alors que $f''(0)$ n'existe pas. L'implication n'est vraie que pour $n \leq 1$.

Théorème — formule de Taylor-Young. Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle, f de classe C^n sur I et $a \in I$. Alors f admet un $DL_n(a)$, donné par

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n).$$

Si f est de classe C^n , l'unicité donne $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$: on lit les dérivées successives sur un DL obtenu autrement.

Idée de preuve de l'ordre 2 (exigible). Soit f deux fois dérivable en a et $g(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h - \frac{f''(a)}{2}h^2$: alors $g(0) = 0$ et $g'(h) = f'(a+h) - f'(a) - f''(a)h = h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon \rightarrow 0$, par dérivabilité de f' en a . L'égalité des accroissements finis donne $g(h) = h g'(\theta h)$ avec $\theta \in]0; 1[$, d'où $|g(h)| \leq h^2 \sup_{|t| \leq |h|} |\varepsilon(t)| = o(h^2)$. Le cas général s'obtient par récurrence sur n , à partir du théorème de primitivation ci-dessous appliqué à f' .

Propriété — développements limités usuels en 0, à tout ordre.

■ FORMULAIRE

- $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4);$
- $\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$

- $\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$ et $\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$;
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$;
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$ et $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$;
- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$);
- $\arctan x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$ et $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ (seul l'ordre 3 de $\tan$ est à connaître; l'ordre 5, $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$, se retrouve par quotient);
- deux cas particuliers de $(1+x)^\alpha$ à écrire de tête : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)$.

4 OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Théorème — combinaison linéaire, produit, quotient. Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières P et Q , alors $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\lambda P + \mu Q$, et fg un $DL_n(0)$ de partie régulière PQ **tronquée à l'ordre n** . Si de plus $g(0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$; en pratique on écrit $g = g(0)(1+u)$ avec $u \rightarrow 0$, puis $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \dots$.

Théorème — primitivation. Soit f dérivable sur I , $a \in I$. Si f' admet un $DL_n(a)$ de partie régulière $\sum_{k=0}^n c_k h^k$, alors f admet un $DL_{n+1}(a)$:

$$f(a+h) = f(a) + c_0 h + \frac{c_1}{2} h^2 + \dots + \frac{c_n}{n+1} h^{n+1} + o(h^{n+1}).$$

On gagne un ordre, et la constante est $f(a)$. *Idée de preuve.* Poser $R(h) = f(a+h) - f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} h^{k+1}$: $R(0) = 0$ et $R'(h) = o(h^n)$, donc pour $\eta > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|R'| \leq \eta |h|^n$ sur $[-\delta; \delta]$; l'IAF donne $|R(h)| \leq \eta |h|^{n+1}$, soit $R(h) = o(h^{n+1})$.

✗ ATTENTION

Il n'y a **pas** de théorème de dérivation d'un DL : f peut admettre un $DL_n(0)$ sans que f' admette un $DL_{n-1}(0)$. Pour dériver, il faut invoquer Taylor-Young sur f' .

Méthode — composition, sur des exemples simples. Aucun résultat général de composition n'est exigible : on procède par **substitution**, après avoir vérifié que la quantité substituée tend vers 0. Pour le $DL_4(0)$ de $e^{\sin x}$: on pose $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \rightarrow 0$, puis $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$; comme $u \sim x$, $o(u^4) = o(x^4)$, et on développe chaque puissance en ne gardant que les termes de degré ≤ 4 : $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$.

Méthode — DL en un point $a \neq 0$. poser $x = a + h$ et développer $h \mapsto f(a+h)$ en 0 : en $a = 1$, $\ln x = \ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$ avec $h = x - 1$.

5 APPLICATIONS À L'ÉTUDE LOCALE

Méthode — limites et équivalents. si le $DL_n(a)$ de f a pour premier coefficient non nul a_p (avec $p \leq n$), alors $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_p h^p$: on obtient limites et équivalents sans forme indéterminée, là où le chapitre 9 demandait une quantité conjuguée. **Gare à la perte d'ordre** : dans un quotient ou une différence les premiers termes se compensent, et il faut partir plus haut que l'ordre voulu. *Règle pratique* : pour un résultat à l'ordre q après division par x^p , développer le numérateur à l'ordre $p+q$ (ainsi $\frac{\sin x - x}{x^3}$ réclame $\sin$ à l'ordre 3 au moins).

Théorème — position par rapport à la tangente. Soit $T : y = f(a) + f'(a)(x-a)$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a . Si $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + a_p h^p + o(h^p)$ avec $a_p \neq 0$ et $p \geq 2$, la différence $f(a+h) - (f(a) + f'(a)h) \sim a_p h^p$ a le signe de $a_p h^p$: si p est pair, la courbe reste du même côté de T (au-dessus si $a_p > 0$) ; si p est impair, elle **traverse** T (point d'inflexion).

Théorème — extremum, condition d'ordre 2. Soient f deux fois dérivable en a et a **intérieur** à l'intervalle I . **Condition nécessaire** : si f a un minimum (resp. maximum) local en a , alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$ (resp. ≤ 0). **Condition suffisante** : si $f'(a) = 0$

et $f''(a) > 0$ (resp. < 0), alors f a en a un minimum (resp. maximum) local strict. *Idée de preuve.* Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(a+h) - f(a) = \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2) \sim \frac{f''(a)}{2}h^2$, du signe de $f''(a)$ près de 0.

✖ ATTENTION

Si $f'(a) = f''(a) = 0$, on ne peut **rien** conclure (x^4 : minimum ; $-x^4$: maximum ; x^3 : ni l'un ni l'autre) : il faut pousser le DL jusqu'au premier terme non nul. Et a doit être *intérieur* : sur $[0; 1]$, $x \mapsto x$ atteint son minimum en 0 sans que la dérivée s'y annule.

Méthode — asymptote oblique en $+\infty$. poser $h = \frac{1}{x}$ (donc $h \rightarrow 0^+$) et chercher un développement $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + o(\frac{1}{x})$. La droite $y = \alpha x + \beta$ est alors asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et $f(x) - (\alpha x + \beta) \sim \frac{\gamma}{x}$ donne la position de la courbe (au-dessus si $\gamma > 0$, en dessous si $\gamma < 0$).

6 DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Définition. Obtenir un **développement asymptotique**, c'est écrire une quantité comme une somme finie de termes explicites de plus en plus petits, suivie d'un reste négligeable devant le dernier terme conservé : ainsi $\sqrt{n^2 + n} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + o(\frac{1}{n})$. Un DL en est le cas particulier où les termes sont les puissances de h . La notion générale d'échelle de comparaison est hors programme : on travaille sur des exemples, en précisant chaque fois devant quoi le reste est négligeable.

Théorème — formule de Stirling. $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. La démonstration n'est pas exigible.

Méthode — les quatre situations du programme. le ressort commun est la **réinjection** : on obtient un premier terme, on le reporte dans la relation de départ, ce qui donne le suivant, et ainsi de suite.

- **fonction réciproque** : écrire $y = f(a+h)$ sous forme de DL, puis *inverser terme à terme* en identifiant les coefficients de $h = f^{-1}(y) - a$;
- **équation à paramètre** : existence et unicité de la racine x_n (théorème de la bijection), encadrement, $\lim x_n$, puis réinjection dans l'équation;
- **suite récurrente** $u_{n+1} = f(u_n)$: chercher α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \rightarrow c \neq 0$; le théorème de Cesàro donne $\frac{u_n^\alpha}{n} \rightarrow c$, d'où un équivalent de u_n ;
- **suite d'intégrales** : encadrer l'intégrande, ou intégrer par parties pour obtenir une relation de récurrence.

➤ SAVOIR-FAIRE

- Justifier $f = O(g)$, $f = o(g)$, $f \sim g$; trouver un équivalent par factorisation du terme dominant ou par un équivalent usuel.
- Lever une forme indéterminée par un DL, à l'ordre juste; calculer un DL par somme, produit, quotient, substitution, primitivation; passer d'un DL en a à un DL en 0.
- Tangente et position de la courbe; extremum par la condition d'ordre 2; asymptote oblique et position; développement asymptotique par réinjection (équation à paramètre, suite récurrente, suite d'intégrales); Stirling.

★ EXEMPLE — deux calculs types

- **Limite et position.** $\frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}$: numérateur $\sim \frac{x^2}{2}$ et dénominateur $\sim \frac{x^2}{2}$, donc le quotient tend vers 1. Pour $f(x) = \ln(1+x)$ en 0, $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$: la tangente est $y = x$ et $f(x) - x \sim -\frac{x^2}{2} < 0$, la courbe est *en dessous* de sa tangente (concavité du logarithme).
- **Développement asymptotique.** $(1 + \frac{1}{n})^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n})) = \exp(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) = e(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}))$, donc $e - (1 + \frac{1}{n})^n \sim \frac{e}{2n}$.

✖ PIÈGES

- Additionner des équivalents, composer un équivalent par $\exp$ ou $\ln$, remplacer un terme par un équivalent dans une somme où il y a compensation; écrire « $f \sim 0$ »; oublier de préciser le point.
- Écrire un DL sans son reste ou avec un reste de mauvais ordre; oublier la constante $f(a)$ en primitivant; dériver un DL; travailler à un ordre insuffisant et obtenir $0 + o(1)$, qui n'apprend rien.
- Conclure à un extremum à partir de $f'(a) = f''(a) = 0$; invoquer un « théorème de composition des DL » (il n'y en a aucun au programme : on substitue).