

Approfondissement Mouvement d'un système

Vitesses centrées, virage, la pomme et la Lune, ascenseur, méthode d'Euler

5 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 3 h · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercice 1 Pourquoi les vitesses « centrées » sont-elles si efficaces ?

●●●

Un projectile est lancé à l'instant $t = 0$ depuis l'origine d'un repère (axe Ox horizontal, axe Oy vertical vers le haut) ; les frottements sont négligés. On admet que ses coordonnées sont $x(t) = v_{0x} t$ et $y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$, et que les coordonnées de son vecteur vitesse sont $v_x(t) = v_{0x}$ et $v_y(t) = v_{0y} - g t$. Les positions sont enregistrées aux instants $t_i = i \tau$.

- 1.1 Montrer que le vecteur $\frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{2\tau}$ a exactement pour coordonnées $v_x(t_i)$ et $v_y(t_i)$: la méthode « centrée » donne ici le vecteur vitesse exact.
- 1.2 Montrer que le vecteur $\frac{\overrightarrow{M_iM_{i+1}}}{\tau}$ est égal au vecteur vitesse à l'instant $t_i + \tau/2$, et non à l'instant t_i .
- 1.3 En déduire que $\Delta \vec{v}_i = \vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}$ vaut exactement $-2g\tau \vec{j}$ ($\vec{j}$: vecteur unitaire de l'axe Oy), quelle que soit la valeur de τ . Que devient alors la relation $\sum \vec{F} \approx m \Delta \vec{v} / \Delta t$?

Exercice 2 Mouvement circulaire uniforme : valeur de Δv

●●●

(Hors programme — pour aller plus loin.) Un point M de masse m décrit un cercle de centre O et de rayon R à vitesse de valeur constante v . Entre deux instants voisins t et $t + \Delta t$, il parcourt l'arc $v \Delta t$ et le rayon OM tourne de l'angle $\theta = v \Delta t / R$ (en radians).

■ DONNÉES $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$

- 2.1 Justifier que l'angle entre $\vec{v}(t)$ et $\vec{v}(t + \Delta t)$ vaut θ (figure 1). Montrer que $\Delta v = 2v \sin(\theta/2)$.
- 2.2 On admet que $\sin u \approx u$ pour u petit (en radians). En déduire que $\Delta v / \Delta t \approx v^2 / R$, puis que la somme des forces qui s'exercent sur M a pour valeur $m v^2 / R$ et est dirigée vers O.
- 2.3 Une voiture de $1\,200 \text{ kg}$ aborde à $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ un virage plat circulaire de rayon 100 m . Calculer la valeur de la force exercée par la route (adhérence des pneus) nécessaire pour suivre le virage. Sur route mouillée, cette force ne peut pas dépasser environ $0,30$ fois le poids : quelle est alors la vitesse maximale dans ce virage ?

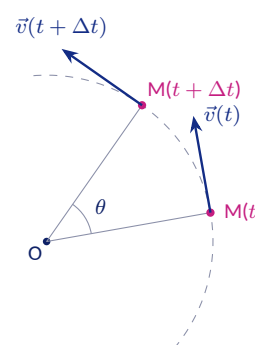


Figure 1 — Deux positions voisines

Exercice 3 La pomme et la Lune

●●●

Newton aurait compris, en voyant tomber une pomme, que la force qui fait tomber les objets sur Terre est aussi celle qui maintient la Lune sur son orbite. On modélise le mouvement de la Lune, dans le référentiel géocentrique, par un mouvement circulaire uniforme de rayon D et de période T .

■ DONNÉES $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ au sol • $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ • Terre : $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ • Lune : $D = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$, $T = 27,3 \text{ j}$

- 3.1 Calculer la valeur v de la vitesse de la Lune et l'angle θ (en degrés) dont elle tourne autour de la Terre en un jour.

- 3.2** On note L_{i-1} , L_i et L_{i+1} trois positions de la Lune séparées d'un jour. Faire un schéma (sans souci d'échelle) représentant $\vec{v}_{i-1}$, $\vec{v}_{i+1}$ et $\Delta\vec{v}_i = \vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}$ en L_i . En utilisant le résultat de la question 2.1 de l'exercice 2, calculer Δv_i puis $\Delta v_i / \Delta t$.
- 3.3** Calculer la valeur du champ de gravitation terrestre à la distance D et la comparer au résultat précédent. Conclure.
- 3.4** Newton ignorait la valeur de G et celle de M_T . Montrer que l'on peut retrouver le résultat de la question 3.2 à partir de la seule valeur de g au sol, en admettant que l'attraction terrestre varie comme l'inverse du carré de la distance au centre de la Terre.

Exercice 4 L'ascenseur et le pèse-personne



Une élève de masse $m = 60 \text{ kg}$ est debout sur un pèse-personne dans un ascenseur qui monte. La figure 2 donne la valeur de la vitesse de l'ascenseur au cours du temps. Le pèse-personne mesure la valeur R de la force qu'il exerce sur l'élève et affiche la « masse » R/g .

■ **DONNÉES** $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$

- 4.1** Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur l'élève.
- 4.2** Dans chacune des trois phases, déterminer la direction et le sens de $\Delta\vec{v}$ ainsi que la valeur de $\Delta v / \Delta t$.
- 4.3** En déduire, pour chaque phase, la valeur de R et la valeur affichée par le pèse-personne.
- 4.4** Que devient l'indication du pèse-personne si le câble casse et que l'ascenseur tombe en chute libre ?

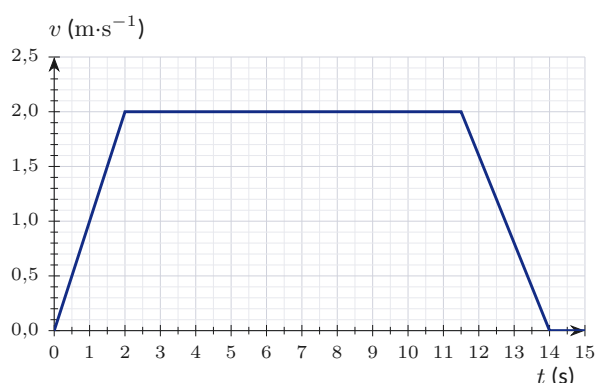


Figure 2 — Vitesse de l'ascenseur

Exercice 5 Prévoir un mouvement : la méthode d'Euler



Lors de la chute d'une parachutiste (masse $m = 80 \text{ kg}$, parachute fermé), la force de frottement de l'air est verticale, vers le haut, de valeur $f = k v^2$ avec $k = 0,26 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$. Le programme ci-dessous calcule de proche en proche la valeur de la vitesse (axe vertical orienté vers le bas).

■ **DONNÉES** $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$

```
1 m, g, k = 80, 9.8, 0.26
2 dt = 0.5          # pas de temps (s)
3 t, v = 0, 0
4 while t < 30:
5     F = m*g - k*v**2
6     v = v + F / m * dt
7     t = t + dt
8 print(t, round(v, 1))
```

- 5.1** Que représente F ? Justifier la ligne 6 à l'aide de la relation approchée.
- 5.2** Calculer à la main les valeurs de v après les deux premiers passages dans la boucle.
- 5.3** Le programme affiche 30.0 54.9. Montrer que la vitesse tend vers une valeur limite $v_\ell = \sqrt{mg/k}$ et la calculer. Que vaut alors la somme des forces ?
- 5.4** Comment modifier le programme pour obtenir un résultat plus précis ?