

Approfondissement Énergie mécanique

Travail et chemin suivi, pendule et clou, distance d'arrêt, looping, saut à l'élastique

5 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 3 h · calculatrice autorisée

Exercice 1 Le poids travaille sans regarder le chemin... les frottements, si



Dans un repère $(O; x, z)$ d'un plan vertical, un solide de masse m se déplace d'un point A à un point B. Son poids s'écrit $\vec{P}(0; -mg)$.

■ **DONNÉES** $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ • axe (Oz) vertical ascendant

- 1.1 On note $A(x_A; z_A)$ et $B(x_B; z_B)$. À l'aide de l'expression du produit scalaire en coordonnées, démontrer que, pour un déplacement rectiligne, $W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$.
- 1.2 Le trajet est maintenant une ligne brisée passant successivement par les points $M_0 = A, M_1, \dots, M_n = B$. Démontrer que le travail du poids est encore $mg(z_A - z_B)$. Pourquoi ce résultat s'étend-il à un trajet courbe quelconque ?
- 1.3 Une caisse de masse $m = 20 \text{ kg}$ va de A à B (figure 1), soit par le chemin 1 (segment $[AB]$), soit par le chemin 2 ($A \rightarrow C \rightarrow B$). Calculer le travail du poids sur chaque chemin, en utilisant les coordonnées des vecteurs.
- 1.4 La caisse subit aussi une force de frottement de valeur constante $f = 40 \text{ N}$, toujours opposée au mouvement. Calculer son travail sur chaque chemin. Pourquoi dit-on que cette force n'est pas conservative ? Peut-on lui associer une énergie potentielle ?

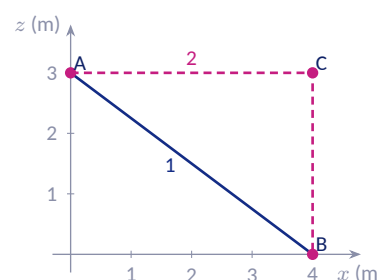


Figure 1 — Deux chemins de A à B

Exercice 2 Le pendule et le clou (expérience de Galilée)



Une petite boule de masse m est suspendue en O à un fil de longueur $L = 1,0 \text{ m}$. On l'écarte d'un angle $\theta_0 = 60^\circ$, puis on la lâche sans vitesse. Les frottements sont négligés. On repère la position de la boule par l'angle θ entre le fil et la verticale; l'origine des altitudes est le point le plus bas M.

■ **DONNÉES** $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$

- 2.1 Justifier que l'énergie mécanique de la boule se conserve. Exprimer l'altitude z de la boule en fonction de L et θ , puis démontrer que $v(\theta) = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$. Calculer la vitesse en M.
- 2.2 Un clou K est planté 40 cm sous O, sur la verticale de O (figure 2). Après le passage en M, la boule tourne autour de K. Montrer qu'elle remonte à la même hauteur qu'au départ, puis calculer l'angle β atteint par le fil par rapport à la verticale.
- 2.3 À quelle distance sous O faut-il planter le clou pour que le fil devienne horizontal au plus haut du mouvement ?

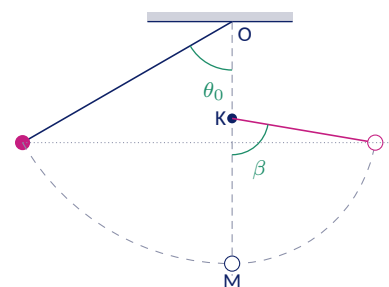


Figure 2 — Le pendule interrompu

Exercice 3 Distance d'arrêt dans le brouillard



Un automobiliste roule à la vitesse v (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) sur une route horizontale. Son temps de réaction est $t_R = 1,0 \text{ s}$: pendant cette durée, la voiture garde sa vitesse; elle freine ensuite avec une force de freinage constante F . On pose $a = F/m$, où m est la masse de la voiture.

- 3.1** Montrer, à l'aide du théorème de l'énergie cinétique, que la distance d'arrêt s'écrit $d_A(v) = v t_R + \frac{v^2}{2a}$.
- 3.2** Sur route mouillée, $a = 5,0 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$. Dans le brouillard, la visibilité est de 60 m. Montrer que la vitesse maximale permettant de s'arrêter avant un obstacle immobile qui apparaît à la limite de visibilité est solution de $v^2 + 10v - 600 = 0$. La calculer en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- 3.3** Reprendre le calcul sur route sèche ($a = 8,0 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$).
- 3.4** Montrer que $d_A(2v) > 2 d_A(v)$ pour tout $v > 0$. Interpréter.

Exercice 4 La vitesse minimale dans un looping



Un wagonnet de masse $m = 500 \text{ kg}$ part sans vitesse d'un point D situé à l'altitude H , descend une rampe puis parcourt une boucle circulaire verticale de rayon $R = 8,0 \text{ m}$; le bas B de la boucle est à l'altitude 0 et son sommet S à l'altitude $2R$ (figure 3).

On admet (hors programme — pour aller plus loin) que le wagonnet reste en contact avec les rails au sommet S si sa vitesse y vérifie $v_S^2 \geq gR$.

- 4.1** Les frottements sont négligés. Exprimer v_S^2 en fonction de g , H et R . En déduire que le wagonnet franchit la boucle si $H \geq \frac{5}{2}R$. Calculer la hauteur minimale.
- 4.2** Avec $H = 25 \text{ m}$, calculer les vitesses en B et en S.
- 4.3** En réalité, entre D et S, une force de frottement de valeur moyenne 400 N s'exerce sur les 60 m de parcours. Quelle hauteur de départ minimale faut-il prévoir ?

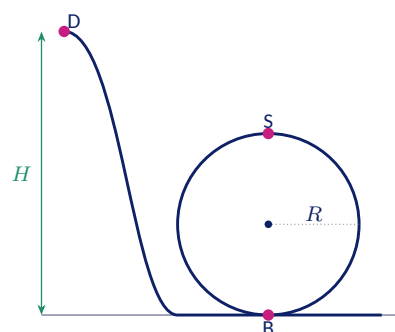


Figure 3 — Rampe et looping

■ DONNÉES $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$

Exercice 5 Le saut à l'élastique



Un sauteur de masse $m = 75 \text{ kg}$ se laisse tomber sans vitesse d'un pont. Il est attaché à un élastique de longueur à vide $L_0 = 20 \text{ m}$; on repère sa position par la distance y parcourue depuis le pont. Tant que $y \leq L_0$, l'élastique n'est pas tendu; ensuite, il stocke une énergie potentielle élastique $E_{pe} = \frac{1}{2}k(y - L_0)^2$ avec $k = 147 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ (hors programme — pour aller plus loin); on appelle alors énergie mécanique du sauteur la somme $E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe}$. Les frottements sont négligés; l'origine des altitudes est prise au point le plus bas atteint, 40 m sous le pont. La figure 4 représente trois énergies du sauteur en fonction de y .

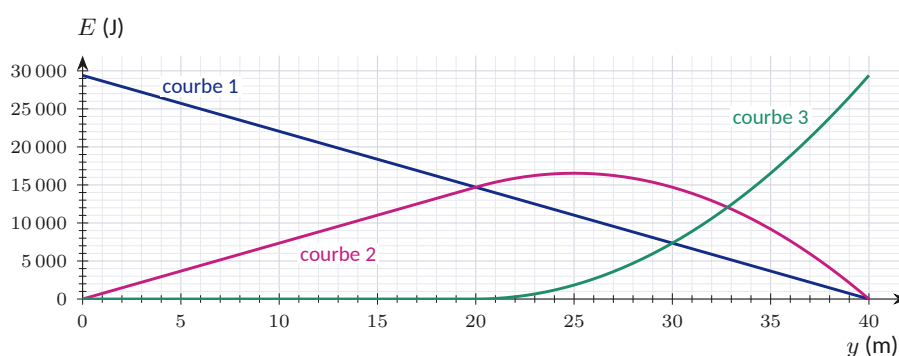


Figure 4 — Énergies du sauteur en fonction de la distance parcourue y

■ DONNÉES $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$

- 5.1** Identifier les courbes 1, 2 et 3 en justifiant. Que vaut l'énergie mécanique du sauteur ?
- 5.2** Calculer sa vitesse lorsque l'élastique commence à se tendre.
- 5.3** Démontrer que le point le plus bas est bien atteint pour $y = 40 \text{ m}$.
- 5.4** Lire la position où la vitesse est maximale, puis calculer cette vitesse maximale. Quelle particularité présente la somme des forces à cet endroit ?