

Exercices 2 Variations et extremums

Application : lire la courbe de f' , une boîte sans couvercle, coût moyen et bénéfice, inégalités et positions relatives, méthode de Newton

5 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée (exercice 5)



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

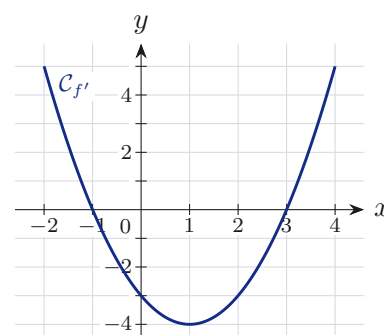
- Passer de la courbe de f' aux variations de f .
- Modéliser un problème d'optimisation par une fonction, l'étudier et interpréter l'extremum obtenu.
- Établir une inégalité ou la position relative de deux courbes en étudiant les variations d'une différence.
- Programmer la méthode de Newton en Python pour approcher une solution d'équation.

Exercice 1 Ce n'est pas la courbe de f , c'est celle de f' !

●●○

Une fonction f est dérivable sur $[-2; 4]$. La courbe ci-contre représente **sa fonction dérivée** f' .

- 1.1 Lire les solutions de l'équation $f'(x) = 0$, puis dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[-2; 4]$.
- 1.2 En déduire le tableau de variations de f (sans les valeurs de f). En quels réels f admet-elle un extremum local ? Préciser sa nature dans chaque cas.
- 1.3 Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ? En quels points cette courbe a-t-elle une tangente horizontale ?
- 1.4 On sait de plus que $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ et $f(0) = 1$. Vérifier que $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ convient, puis compléter le tableau de variations de f avec les valeurs $f(-2)$, $f(-1)$, $f(3)$ et $f(4)$.

Figure 1 — La courbe de la dérivée f'

Exercice 2 La boîte sans couvercle

●●○

Dans une plaque de carton rectangulaire de 24 cm sur 15 cm, on découpe aux quatre coins quatre carrés identiques de côté x (en cm), puis on relève les bords le long des pointillés pour obtenir une boîte sans couvercle (figure 2).

- 2.1 Dans quel intervalle x peut-il varier ? Donner les dimensions de la boîte pour $x = 2$ et calculer alors son volume.
- 2.2 Montrer que le volume de la boîte, en cm^3 , est $V(x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x$.

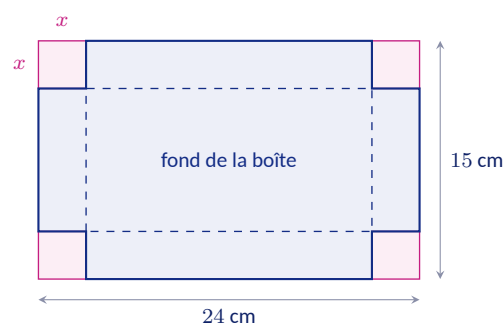


Figure 2 — Le patron de la boîte

- 2.3 Calculer $V'(x)$ et montrer que $V'(x) = 12(x - 3)(x - 10)$. Dresser le tableau de variations de V sur son intervalle d'étude.
- 2.4 Quelle valeur de x faut-il choisir pour que la boîte ait un volume maximal ? Donner les dimensions de cette boîte et son volume, en cm^3 puis en litres.

- 2.5** Combien de valeurs de x donnent une boîte de 400 cm^3 ? Justifier à l'aide du tableau de variations (on ne demande pas de les calculer).

Exercice 3 Coût moyen et bénéfice d'un fabricant de lampes

●●○

Une entreprise fabrique chaque mois q centaines de lampes, avec $q \in [1; 10]$. Le coût total de fabrication, en centaines d'euros, est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 98$.

- 3.1** Le coût moyen de fabrication d'une centaine de lampes est $M(q) = \frac{C(q)}{q}$. Montrer que, pour tout $q \in [1; 10]$, $M'(q) = \frac{2q^3 - 12q^2 - 98}{q^2}$, puis vérifier que $2q^3 - 12q^2 - 98 = (q - 7)(2q^2 + 2q + 14)$.
- 3.2** Étudier le signe de $M'(q)$ et dresser le tableau de variations de M sur $[1; 10]$. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal? Quel est alors le coût de revient d'une lampe, en euros?
- 3.3** Chaque lampe est vendue 60 euros. Montrer que le bénéfice mensuel, en centaines d'euros, est $B(q) = -q^3 + 12q^2 - 98$.
- 3.4** Étudier les variations de B sur $[1; 10]$. Quelle production rend le bénéfice maximal? Quel est ce bénéfice, en euros? Est-ce la production qui minimise le coût moyen?

Exercice 4 Inégalités et positions relatives

●●○

- 4.1** On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction cube et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = 3x^2 - 4$. On pose $d(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ pour $x \in [-2; 4]$.
- a) Étudier les variations de d sur $[-2; 4]$ et dresser son tableau de variations. Calculer $d(-1)$.
- b) En déduire le signe de $d(x)$ sur $[-2; 4]$, puis la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ sur cet intervalle. Vérifier que $d(x) = (x + 1)(x - 2)^2$. Que se passe-t-il au point d'abscisse 2?
- 4.2** Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $x^2 + \frac{16}{x} \geq 12$. Pour quelle valeur de x y a-t-il égalité?

Exercice 5 La méthode de Newton pour approcher $\sqrt{2}$

●●○

On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2$; le nombre $\sqrt{2}$ est la solution de $f(x) = 0$. La méthode de Newton part de $x_0 = 2$, puis remplace chaque valeur approchée u par l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u .

- 5.1** Montrer que cette tangente coupe l'axe des abscisses au

$$\text{point d'abscisse } u - \frac{f(u)}{f'(u)} = \frac{1}{2} \left(u + \frac{2}{u} \right).$$

- 5.2** Calculer, sous forme de fractions, x_1 et x_2 . Vérifier que $x_2^2 - 2 = \frac{1}{144}$.

- 5.3** Que renvoie la fonction `newton` ci-dessus? Exécuter le programme et donner les valeurs affichées.

- 5.4** Par *balayage*, on cherche le premier nombre $1 + k \times 0,001$ (k entier) dont le carré dépasse 2. Écrire une fonction Python `balayage()` qui renvoie ce nombre et le nombre d'étapes nécessaires. Comparer l'efficacité des deux méthodes.

```
1 def newton(u, precision):
2     n = 0
3     while abs(u**2 - 2) > precision:
4         u = (u + 2 / u) / 2
5         n = n + 1
6     return u, n
7
8 print(newton(2, 10**-12))
```