

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 6



R. RINGUET · 2026 – 2027

Approfondissement Variations et extremums

Pour aller plus loin : extremum et dérivée nulle, parité et dérivation, inégalités de tangente, cylindre dans une sphère, équations du troisième degré, méthode de Newton

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 3 h · calculatrice autorisée (exercice 6)

Exercice 1 Démonstration : un extremum local annule la dérivée

●●●

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On suppose que f admet un maximum local en a : il existe un réel $r > 0$ tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in]a - r ; a + r[$ (intervalle inclus dans I).

- 1.1 Soit h un réel tel que $0 < h < r$. Quel est le signe de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$? En faisant tendre h vers 0, en déduire que $f'(a) \leq 0$.
- 1.2 Par un raisonnement analogue avec $-r < h < 0$, démontrer que $f'(a) \geq 0$. Conclure. Adapter la démonstration au cas d'un minimum local.
- 1.3 Pourquoi l'hypothèse « I ouvert » est-elle indispensable ? Donner un exemple de fonction dérivable sur $[0 ; 1]$ qui admet un maximum en 1 alors que sa dérivée ne s'y annule pas.
- 1.4 Démontrer que la fonction $x \mapsto x^3 + ax$ n'admet aucun extremum local lorsque $a \geq 0$, et en admet deux lorsque $a < 0$.

Exercice 2 Parité et dérivation

●●●

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

- 2.1 On suppose f paire. Soit a un réel et $h \neq 0$. Démontrer que $\frac{f(-a+h) - f(-a)}{h} = -\frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$. En déduire que $f'(-a) = -f'(a)$: la dérivée d'une fonction paire est impaire. Que vaut alors $f'(0)$? Interpréter graphiquement.
- 2.2 Démontrer de même que la dérivée d'une fonction impaire est paire.
- 2.3 On pose, pour tout réel x , $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Démontrer que p est paire, que i est impaire et que $f = p + i$. Démontrer que cette écriture est unique. Application : écrire $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$ comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- 2.4 Une fonction dérivable dont la dérivée est paire est-elle forcément impaire ? (On pourra penser à $x \mapsto x^3 + 1$.)

Exercice 3 Inégalités de tangente

●●●

- 3.1 Démontrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $x\sqrt{x} \geq \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, et interpréter graphiquement à l'aide de la tangente à la courbe de $x \mapsto x\sqrt{x}$ au point d'abscisse 1.
- 3.2 Soit $n \geq 2$ un entier. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $x^n \geq 1 + n(x - 1)$. Interpréter graphiquement.
- 3.3 En déduire que, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2$ (on pourra poser $x = \frac{a}{b}$ avec $n = 3$). Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Exercice 4 Le plus grand cylindre dans une sphère



Une sphère de centre O a pour rayon $R = 3$ dm. On y inscrit un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon r (en dm), dont l'axe passe par O et dont les cercles de base sont sur la sphère (figure 1, vue en coupe).

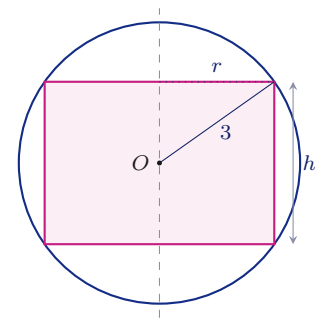


Figure 1 — Coupe par un plan contenant l'axe

- 4.1 À l'aide du théorème de Pythagore, montrer que $r^2 = 9 - \frac{h^2}{4}$. Dans quel intervalle h varie-t-il ?
- 4.2 Montrer que le volume du cylindre est $V(h) = \pi \left(9h - \frac{h^3}{4} \right)$, puis étudier les variations de V .
- 4.3 En déduire les dimensions du cylindre de volume maximal et ce volume. Quelle fraction du volume de la boule, $\frac{4}{3}\pi R^3$, occupe-t-il ?
- 4.4 Démontrer que, pour ce cylindre, $h = r\sqrt{2}$.

Exercice 5 Combien de solutions pour une équation du troisième degré ?



Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x$. On admet que, sur un intervalle où g est strictement monotone, l'équation $g(x) = m$ a **au plus** une solution, et qu'elle en a exactement une si m est compris entre les valeurs de g aux bornes (la courbe se trace sans lever le crayon).

- 5.1 Dresser le tableau de variations de g sur $[-3; 3]$. Démontrer que g est impaire et interpréter.
- 5.2 Selon les valeurs du réel $m \in [-18; 18]$, déterminer le nombre de solutions dans $[-3; 3]$ de l'équation $x^3 - 3x = m$. Résoudre l'équation pour $m = 2$, puis pour $m = 18$.
- 5.3 (Hors programme — pour aller plus loin.) Soit $p < 0$ et q deux réels, et $f(x) = x^3 + px + q$. On pose $s = \sqrt{-\frac{p}{3}}$. Démontrer que f admet un maximum local en $-s$ et un minimum local en s , puis que $f(-s) \times f(s) = q^2 + \frac{4p^3}{27}$. En admettant que f prend des valeurs négatives et positives aussi grandes qu'on veut, en déduire que l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions réelles distinctes si et seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$. Vérifier sur $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Exercice 6 La méthode de Newton pour une équation du troisième degré



On considère l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, exemple choisi par Newton lui-même pour présenter sa méthode, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x - 5$.

- 6.1 Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ (sans limites). Démontrer que $f(x) < 0$ pour tout $x \leq 2$, puis que l'équation a une unique solution réelle α , et que $\alpha \in [2; 3]$.
- 6.2 Montrer que la méthode de Newton s'écrit $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Avec $x_0 = 2$, calculer x_1 à la main.
- 6.3 Exécuter le programme ci-dessus, puis le modifier pour donner, à 10^{-10} près, les valeurs de x_1, x_2, x_3 et x_4 . Combien de décimales exactes gagne-t-on à chaque étape ? Comparer avec un balayage de pas 10^{-6} à partir de 2 : combien d'étapes faudrait-il ?
- 6.4 La méthode ne fonctionne pas toujours. Avec $g(x) = x^3 - 2x + 2$ et $x_0 = 0$, calculer x_1 et x_2 : que se passe-t-il ? Que se passerait-il si l'on partait d'un réel x_0 tel que $g'(x_0) = 0$?

```

1 def f(x):
2     return x**3 - 2*x - 5
3 def fp(x):
4     return 3*x**2 - 2
5 def newton(x, n):
6     for k in range(n):
7         x = x - f(x) / fp(x)
8     return x
9 print(newton(2, 4))

```