

Sujet type épreuve anticipée

Variables aléatoires

Partie 1 : douze questions d'automatismes — Partie 2 : le stock du marchand de glaces, étude d'une fonction, les poissons d'un lac

Durée : 2 h · sans calculatrice · QCM et 3 exercices · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

L'usage de la calculatrice est interdit. Le sujet comporte deux parties indépendantes. **Partie 1** : pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, sans justification. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. **Partie 2** : les réponses doivent être justifiées ; la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent dans l'appréciation des copies.

Partie 1 — Automatismes (6 points)

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

6 pts ●○○○

1.1 Le nombre $\frac{7}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{9}$ est égal à :

a) $\frac{2}{9}$

b) $\frac{19}{12}$

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{17}{12}$

1.2 Le nombre $(3 \times 10^4)^2$ est égal à :

a) 9×10^8

b) 3×10^8

c) 9×10^{16}

d) 6×10^8

1.3 Pour tout réel x , l'expression $(x+1)^2 - 25$ est égale à :

a) $(x+4)(x-6)$

b) $(x-4)(x+6)$

c) $(x-24)(x+26)$

d) $x^2 + 2x - 26$

1.4 L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(x-2)(3-x) < 0$ est :

a) $]2; 3[$

b) $] -\infty; 2[\cup]3; +\infty[$

c) $] -\infty; -3[\cup]2; +\infty[$

d) $] -3; 2[$

1.5 La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $[-3; 3]$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 1$ est :

a) $[-2; 0] \cup [2; 3]$

b) $[-3; -2] \cup [0; 2]$

c) $[-2; 2]$

d) $\{-2; 0; 2\}$

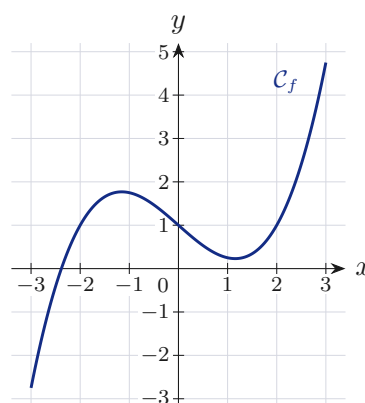
1.6 Une agence de voyages a reçu 200 clients : 120 adultes, dont 30 ont souscrit l'option « annulation », et 80 enfants, dont 50 ont souscrit cette option. On choisit au hasard un client ayant souscrit l'option. La probabilité que ce soit un adulte est :

a) $\frac{1}{4}$

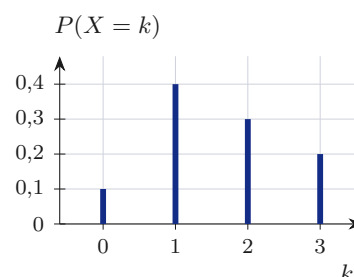
b) $\frac{3}{20}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{2}{5}$



- 1.7** Un article coûte 60 euros TTC, prix qui inclut une TVA de 20 % calculée sur le prix hors taxes. Son prix hors taxes est :
- a) 48 euros b) 72 euros c) 40 euros d) 50 euros
- 1.8** La moyenne de cinq nombres est égale à 8. On ajoute à cette série le nombre 14. La moyenne des six nombres obtenus est égale à :
- a) 9 b) 11 c) 8,5 d) 10
- 1.9** Dans un repère, la droite passant par les points $A(1; 2)$ et $B(3; 8)$ a pour équation réduite :
- a) $y = 2x$ b) $y = 3x + 2$ c) $y = 3x - 1$ d) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
- 1.10** La loi d'une variable aléatoire X est représentée par le diagramme en bâtons ci-contre. La probabilité $P(X \geq 2)$ est égale à :
- a) 0,3 b) 0,9 c) 0,5 d) 0,2



- 1.11** Une variable aléatoire Y prend les valeurs -1 , 1 et 4 avec les probabilités respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$. L'espérance de Y est égale à :
- a) $\frac{4}{3}$ b) 0 c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{1}{2}$
- 1.12** Une variable aléatoire Z a pour écart type $\sigma(Z) = 3$. La variance de la variable aléatoire $2Z - 1$ est égale à :
- a) 6 b) 36 c) 35 d) 17

Partie 2 — Exercices (14 points)

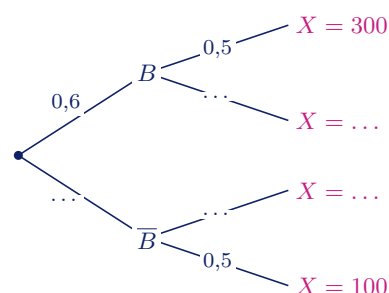
Exercice 2 Le stock du marchand de glaces

6 pts ●●○

Un marchand de glaces s'installe chaque jour d'été sur une plage. Un jour donné, il fait beau avec la probabilité 0,6. Quand il fait beau, la demande est de 300 glaces avec la probabilité 0,5 et de 200 glaces sinon ; quand il ne fait pas beau, la demande est de 200 glaces avec la probabilité 0,5 et de 100 glaces sinon. On choisit un jour d'été au hasard ; on note B l'événement « il fait beau » et X la demande de glaces ce jour-là.

Partie A — La loi de la demande

- 2.1** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre. Démontrer que $P(X = 200) = 0,5$, puis donner la loi de X .
- 2.2** Calculer $E(X)$. Démontrer que $E(X^2) = 49\,000$ et en déduire $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- 2.3** Un jour, la demande a été de 200 glaces. Quelle est la probabilité qu'il ait fait beau ? Les événements B et $\{X = 200\}$ sont-ils indépendants ?



Partie B — Combien de glaces préparer ?

Le marchand vend chaque glace 4 euros ; chaque glace préparée lui coûte 1 euro, et les glaces non vendues en fin de journée sont perdues. Il ne peut pas vendre plus de glaces qu'il n'en a préparé.

- 2.4** Le marchand prépare chaque jour 300 glaces. Justifier que son bénéfice du jour, en euros, est $B_{300} = 4X - 300$. En déduire $E(B_{300})$ et $\sigma(B_{300})$.
- 2.5** Le marchand prépare chaque jour 200 glaces ; on note B_{200} son bénéfice du jour. Justifier que B_{200} ne prend que deux valeurs, que l'on précisera, puis donner sa loi et calculer $E(B_{200})$ et $\sigma(B_{200})$.

- 2.6 Quel choix conseiller à un marchand qui cherche le meilleur bénéfice moyen ? à un marchand qui craint les mauvaises journées ? Justifier à l'aide des résultats précédents.

Exercice 3 Étude d'une fonction

4 pts ●●○

On considère la fonction f définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = (3 - x)e^x$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. On donne $e^2 \approx 7,4$.

- 3.1 Démontrer que, pour tout réel x de $[0; 4]$, $f'(x) = (2 - x)e^x$.
- 3.2 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 4]$ et dresser le tableau de variations de f . Préciser la valeur exacte du maximum de f , puis en donner une valeur approchée.
- 3.3 Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- 3.4 Résoudre dans $[0; 4]$ l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 4 Les poissons d'un lac

4 pts ●●○

Au 1^{er} janvier 2026, un lac contient 2 000 truites. Chaque année, 20 % des truites disparaissent (pêche, prédateurs), puis la fédération de pêche introduit 600 nouvelles truites. On note u_n le nombre de truites au 1^{er} janvier de l'année $2026 + n$; ainsi $u_0 = 2\,000$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 600$.

```
1 u = 2000
2 n = 0
3 while .....:
4     u = 0.8 * u + 600
5     n = n + 1
6 print(n)
```

- 4.1 Calculer u_1 et u_2 .
- 4.2 On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 3\,000$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
- 4.3 En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3\,000 - 1\,000 \times 0,8^n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) et conjecturer sa limite.
- 4.4 Recopier et compléter la ligne 3 du programme ci-dessus pour qu'il affiche le plus petit entier n tel que $u_n > 2\,900$. Sachant que $0,8^{10} \approx 0,107$ et $0,8^{11} \approx 0,086$, quelle valeur ce programme affiche-t-il ? Interpréter.