

# Fiche de cours Variables aléatoires

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

## 1 VARIABLE ALÉATOIRE ET LOI DE PROBABILITÉ

**Définition.** Une **variable aléatoire**  $X$  définie sur un univers fini  $\Omega$  est une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience aléatoire.

**Notation.** Pour un réel  $a$ ,  $\{X = a\}$  est l'événement «  $X$  prend la valeur  $a$  » ; on note  $P(X = a)$  sa probabilité. De même  $\{X \leq a\}$ ,  $\{X < a\}$ ,  $\{X \geq a\}$ , et  $P(X \leq a)$  est la somme des  $P(X = x_i)$  pour les valeurs  $x_i$  inférieures ou égales à  $a$ .

**Définition.** La **loi de probabilité** de  $X$  est la donnée des valeurs  $x_1, \dots, x_n$  prises par  $X$  et des probabilités  $p_i = P(X = x_i)$  ; on la présente dans un tableau. On a toujours  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

**Méthode — déterminer une loi.** Repérer les valeurs prises par  $X$  ; pour chacune, décrire l'événement correspondant et calculer sa probabilité (dénombrement, tableau croisé, arbre pondéré) ; vérifier enfin que la somme des probabilités vaut 1. La loi se visualise par un **diagramme en bâtons**.

## 2 ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART TYPE

**Définition.** L'**espérance** de  $X$  est le nombre

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

C'est la moyenne des valeurs de  $X$  pondérées par leurs probabilités : sur un très grand nombre de répétitions de l'expérience, la moyenne des valeurs observées se rapproche de  $E(X)$ .

**Définition.** La **variance** et l'**écart type** de  $X$  sont

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \geq 0, \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Ils mesurent la dispersion des valeurs de  $X$  autour de  $E(X)$  ;  $\sigma(X)$  s'exprime dans la même unité que  $X$ .

**Théorème — formule de König-Huygens.**  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ , où  $E(X^2) = p_1 x_1^2 + \dots + p_n x_n^2$ . C'est la formule à utiliser pour les calculs.

**Propriété — linéarité.** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$E(aX + b) = a E(X) + b, \quad V(aX + b) = a^2 V(X), \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

Ajouter  $b$  décale l'espérance mais ne change pas la dispersion ; multiplier par  $a$  multiplie l'écart type par  $|a|$ .

**Méthode — calculer  $E$ ,  $V$  et  $\sigma$ .** Dresser le tableau de la loi, puis ajouter une ligne  $p_i x_i$  et une ligne  $p_i x_i^2$  : leurs sommes donnent  $E(X)$  et  $E(X^2)$ , d'où  $V(X)$  par König-Huygens, puis  $\sigma(X)$ .

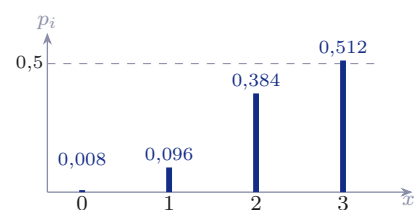


Figure 1 — Diagramme en bâtons de la loi du nombre de succès de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre  $p = 0,8$ .

## 3 NOMBRE DE SUCCÈS, JEUX, ÉCHANTILLONS

**Définition.** Un **jeu est équitable** lorsque l'espérance du gain algébrique  $G$  du joueur est nulle :  $E(G) = 0$ . Si  $E(G) > 0$ , le jeu est favorable au joueur ; si  $E(G) < 0$ , il lui est défavorable. Le gain algébrique tient compte de la mise.

**Propriété — nombre de succès.** On répète  $n$  fois ( $n \leq 4$ ), de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ , et on note  $X$  le nombre de succès. La loi de  $X$  s'obtient avec l'arbre :  $P(X = k)$  est le nombre de chemins à  $k$  succès, multiplié par  $p^k (1 - p)^{n-k}$ .

**Remarque — simulation.** Un **échantillon** de taille  $n$  est la liste des valeurs obtenues en répétant  $n$  fois l'expérience de façon indépendante ; sa moyenne  $M$  varie d'un échantillon à l'autre, mais s'écarte rarement de  $\mu = E(X)$  de plus de  $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ , où  $\sigma = \sigma(X)$  : plus  $n$  est grand, plus  $M$  est proche de  $\mu$ .

**Remarque — algorithme.** La fonction `esperance_variance` reçoit la liste des valeurs et celle des probabilités, et renvoie l'espérance et la variance de la loi; la fonction `moyenne_echantillon` simule un échantillon de taille  $n$  du lancer d'un dé équilibré et en renvoie la moyenne.

```
1 def esperance_variance(x, p):
2     e = sum(p[i] * x[i] for i in range(len(x)))
3     e2 = sum(p[i] * x[i] ** 2 for i in range(len(x)))
4     return e, e2 - e ** 2
```

```
1 from random import randint
2 def moyenne_echantillon(n):
3     s = 0
4     for i in range(n):
5         s = s + randint(1, 6)
6     return s / n
```

## 4 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

### ► SAVOIR-FAIRE

- Modéliser une situation par une variable aléatoire; interpréter et utiliser les notations  $\{X = a\}$  et  $P(X \leq a)$ .
- Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et la représenter par un diagramme en bâtons.
- Calculer  $E(X)$ ,  $V(X)$  (par König-Huygens) et  $\sigma(X)$ , et les interpréter.
- Utiliser la linéarité pour passer de  $X$  à  $aX + b$  (changement d'unité, gain net, bénéfice).
- Étudier un jeu (équitable ou non), comparer deux stratégies; déterminer la loi du nombre de succès de  $n \leq 4$  épreuves de Bernoulli.

## 5 EXEMPLES TYPES

### ★ EXEMPLE — loi, espérance et variance

Un joueur lance un dé équilibré; son gain algébrique  $X$ , en euros, vaut 10 si le résultat est 6, et  $-2$  sinon. Loi :  $P(X = 10) = \frac{1}{6}$ ,  $P(X = -2) = \frac{5}{6}$ . Alors  $E(X) = \frac{10}{6} - \frac{10}{6} = 0$  : le jeu est équitable. De plus  $E(X^2) = \frac{100}{6} + \frac{4 \times 5}{6} = 20$ , donc  $V(X) = 20 - 0^2 = 20$  et  $\sigma(X) = 2\sqrt{5} \approx 4,47$ .

### ★ EXEMPLE — linéarité

Une température  $X$  en degrés Celsius vérifie  $E(X) = 18$  et  $\sigma(X) = 5$ . En degrés Fahrenheit,  $Y = 1,8X + 32$  :  $E(Y) = 1,8 \times 18 + 32 = 64,4$ ,  $V(Y) = 1,8^2 \times 25 = 81$  et  $\sigma(Y) = 1,8 \times 5 = 9$ .

### ★ EXEMPLE — nombre de succès

Un joueur marque chaque lancer franc avec la probabilité 0,8 et en tire 3, de façon indépendante;  $X$  est le nombre de paniers. L'arbre donne  $P(X = 0) = 0,2^3 = 0,008$ ,  $P(X = 1) = 3 \times 0,8 \times 0,2^2 = 0,096$ ,  $P(X = 2) = 3 \times 0,8^2 \times 0,2 = 0,384$  et  $P(X = 3) = 0,8^3 = 0,512$  (somme 1). Alors  $E(X) = 0,096 + 2 \times 0,384 + 3 \times 0,512 = 2,4$  paniers en moyenne.

### ★ EXEMPLE — jeu équitable

Un jeu coûte 2 euros : on tire une carte d'un jeu de 32 cartes; un as rapporte 6 euros, une figure 2 euros, les autres cartes rien. Le gain brut  $X$  vérifie  $P(X = 6) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ ,  $P(X = 2) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$  et  $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ , donc  $E(X) = \frac{6}{8} + \frac{6}{8} = 1,5$ . Le gain algébrique est  $G = X - 2$ , d'espérance  $E(G) = 1,5 - 2 = -0,5$  : le jeu est défavorable au joueur, qui perd en moyenne 0,50 euro par partie. Il serait équitable pour une mise de 1,50 euro.

### ✖ PIÈGES

- Vérifier systématiquement que la somme des probabilités de la loi vaut 1; une probabilité négative ou supérieure à 1 signale une erreur.
- $E(X)$  n'est pas toujours une valeur prise par  $X$  (ici 2,4 paniers) : c'est une moyenne, pas un résultat possible.
- Dans  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ ,  $E(X^2)$  se calcule avec les  $x_i^2$  et les mêmes  $p_i$ ; ce n'est pas  $E(X)^2$ .
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$  : le  $b$  disparaît et le  $a$  est au carré; pour l'écart type, c'est  $|a|$ , jamais  $a$  s'il est négatif.
- Un jeu équitable se juge sur le gain algébrique (mise déduite), et non sur le montant reçu.