

# Exercices 1 Variables aléatoires

Les bases : loi de probabilité, notations, espérance, variance, écart type, linéarité, jeu équitale

7 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h · sans calculatrice

## ★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Modéliser par une variable aléatoire ; utiliser les notations  $\{X = a\}$ ,  $P(X \leq a)$  ; déterminer une loi (dénombrement, tableau à double entrée, arbre) et la représenter par un diagramme en bâtons.
- Calculer et interpréter espérance, variance, écart type ; utiliser la formule de König-Huygens et la linéarité ; reconnaître un jeu équitale.

## ■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

La variable aléatoire  $X$  prend les valeurs  $x_1, \dots, x_n$  avec les probabilités  $p_i = P(X = x_i)$  (de somme 1).

- **Espérance** :  $E(X) = p_1x_1 + \dots + p_nx_n$  : valeur moyenne de  $X$  sur un très grand nombre de répétitions.
- **Variance** :  $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$  ; **écart type** :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .
- **Formule de König-Huygens** :  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ , où  $E(X^2) = p_1x_1^2 + \dots + p_nx_n^2$ .
- **Linéarité** ( $a, b$  réels) :  $E(aX + b) = aE(X) + b$ ,  $V(aX + b) = a^2V(X)$ ,  $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$ .
- **Jeu équitale** : l'espérance du gain algébrique  $G$  du joueur est nulle,  $E(G) = 0$ .

## Exercice 1 Une loi donnée par un tableau

●○○

Une variable aléatoire  $X$  a pour loi de probabilité :

|              |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$        | -2  | 0   | 2   | 6   |
| $P(X = x_i)$ | 0,4 | 0,1 | $a$ | 0,2 |

- 1.1 Calculer  $a$ , puis  $P(X \leq 0)$ ,  $P(X > 0)$  et  $P(-2 < X \leq 2)$ . Décrire par une phrase l'événement contraire de  $\{X \leq 0\}$ , puis calculer  $P(X^2 \leq 4)$ .
- 1.2 Calculer  $E(X)$ , puis  $V(X)$  à l'aide de la définition, et  $\sigma(X)$ . Calculer  $E(X^2)$  et retrouver  $V(X)$  grâce à la formule de König-Huygens.

## Exercice 2 La pêche aux canards

●○○

Dans un stand de fête foraine, un bassin contient 20 canards en plastique. Sous 11 d'entre eux, rien n'est inscrit ; sous 6 canards est inscrit un lot d'une valeur de 2 euros, sous 2 canards un lot de 5 euros et sous un seul canard un lot de 15 euros. Une partie coûte 2 euros et consiste à pêcher un canard au hasard. On note  $X$  le gain algébrique du joueur (valeur du lot moins le prix de la partie), en euros.

- 2.1 Quelles sont les valeurs prises par  $X$  ? Que signifie l'événement  $\{X = 0\}$  ? Donner la loi de probabilité de  $X$  dans un tableau, puis la représenter par un diagramme en bâtons.
- 2.2 Calculer  $P(X > 0)$  et  $P(X \geq 0)$ , puis  $E(X)$ . Interpréter ce dernier résultat pour le forain.

## Exercice 3 Changer d'unité : la linéarité

●●○

- 3.1 Un jour de mai choisi au hasard, la température  $X$  à midi (en degrés Celsius) a pour espérance 18 et pour écart type 5. En degrés Fahrenheit, elle vaut  $Y = 1,8X + 32$ . Calculer  $E(Y)$ ,  $V(Y)$  et  $\sigma(Y)$ .
- 3.2 Un élève affirme : « pour toute variable aléatoire  $X$ ,  $V(-2X + 3) = -2V(X) + 3$  ». Pourquoi est-ce forcément faux ? Corriger l'égalité.

### Exercice 4 Lire un diagramme en bâtons

À un péage d'autoroute, on choisit une voiture au hasard et on note  $X$  le nombre de personnes à son bord. La loi de  $X$  est représentée par le diagramme en bâtons de la figure 1.

- 4.1** Donner la loi de probabilité de  $X$  dans un tableau ; calculer  $P(X \leq 2)$  et  $P(X \geq 3)$ .
- 4.2** Calculer  $E(X)$  et interpréter le résultat. Le péage est à moitié prix pour les voitures transportant au moins trois personnes. Sur 2 000 voitures, combien peut-on s'attendre à en compter qui bénéficient de ce tarif ?

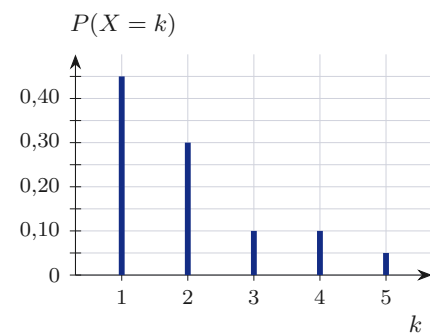


Figure 1 — Loi du nombre  $X$  de passagers

### Exercice 5 Deux dés tétraédriques : un tableau à double entrée

On lance deux dés équilibrés à quatre faces numérotées de 1 à 4, l'un rouge et l'autre bleu. On note  $X$  l'écart entre les deux numéros obtenus (le plus grand moins le plus petit;  $X = 0$  en cas d'égalité).

- 5.1** Recopier et compléter le tableau ci-contre, qui donne la valeur de  $X$  pour chacune des 16 issues équiprobables.
- 5.2** En déduire la loi de probabilité de  $X$ , puis calculer  $P(X \leq 1)$  et  $E(X)$ .

| Rouge \ Bleu | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------|---|---|---|---|
| 1            | 0 | 1 |   |   |
| 2            |   | 0 |   |   |
| 3            |   |   |   | 1 |
| 4            | 3 |   |   |   |

### Exercice 6 Le trousseau de clés : une loi obtenue par un arbre

Hugo possède un trousseau de 4 clés d'apparence identique; une seule ouvre la porte de son garage. Il essaie les clés une à une, au hasard, en mettant de côté chaque clé qui a échoué. On note  $X$  le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte,  $B_k$  l'événement « la  $k$ -ième clé essayée est la bonne » et  $\overline{B_k}$  son contraire.

- 6.1** Justifier que  $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}$ , puis recopier et compléter l'arbre de la figure 2.
- 6.2** Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . Que remarque-t-on?
- 6.3** Calculer  $E(X)$  et, à l'aide de la formule de König-Huygens, démontrer que  $V(X) = \frac{5}{4}$ .

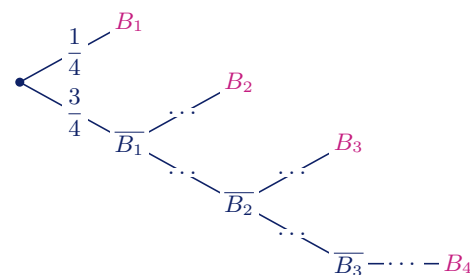


**Figure 2 — L'arbre des essais, à compléter**

## Exercice 7 La loterie de l'association

Une association vend 500 billets de loterie à 3 euros : 1 billet gagne un lot de 300 euros, 4 billets gagnent chacun 50 euros et 20 billets gagnent chacun 10 euros ; les autres ne gagnent rien. On achète un billet au hasard et on note  $G$  le gain algébrique (lot éventuel moins le prix du billet), en euros.

- 7.1** Donner la loi de probabilité de  $G$ .
- 7.2** Démontrer que  $E(G) = -1,6$  et interpréter ce résultat. Quel bénéfice l'association réalise-t-elle si les 500 billets sont vendus? Faire le lien avec  $E(G)$ .
- 7.3** À quel prix aurait-il fallu vendre le billet pour que la loterie soit un jeu équitable?