

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 12

Contrôle B Variables aléatoires

Vrai ou faux, un QCM au hasard avec pénalité, l'extension de garantie, simulation au jeu de fléchettes

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Tout résultat doit être justifié; la qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation. Les probabilités sont données sous forme décimale ou de fraction irréductible.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

- 1.1 Affirmation 1 : si une variable aléatoire X prend les valeurs -2 , 1 et 4 avec la même probabilité, alors $E(X) = 1$ et $V(X) = 6$.
- 1.2 Affirmation 2 : pour toute variable aléatoire X , on a $V(-2X) = -2V(X)$.
- 1.3 Affirmation 3 : si une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 5$ et $V(X) = 4$, alors $E(X^2) = 21$.
- 1.4 Affirmation 4 : si X vérifie $P(X \leq 2) = 0,7$ et $P(X \geq 2) = 0,6$, alors $P(X = 2) = 0,3$.

Exercice 2 Répondre au hasard à un QCM avec pénalité

5 pts ●●○

Un QCM comporte quatre questions; pour chacune, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point. Un élève qui n'a pas révisé répond au hasard à chacune des quatre questions, indépendamment d'une question à l'autre. On note N le nombre de réponses exactes et S la note obtenue.

- 2.1 Décrire l'arbre pondéré associé aux quatre réponses (nombre de niveaux, de chemins, probabilités des branches). Combien de chemins comportent exactement deux réponses exactes? Démontrer que $P(N = 2) = 8/27$, puis donner la loi de N .
- 2.2 Démontrer que $E(N) = 4/3$ et $V(N) = 8/9$.
- 2.3 Justifier que $S = 1,5N - 2$. En déduire $E(S)$ et $V(S)$, puis interpréter $E(S)$. Calculer la probabilité que l'élève obtienne une note strictement positive.
- 2.4 Un autre QCM comporte aussi quatre questions, mais quatre réponses sont proposées pour chacune. Quel nombre de points faut-il retirer pour une réponse fausse (une réponse exacte rapportant toujours 1 point) pour qu'un élève répondant au hasard obtienne une note d'espérance nulle?

Exercice 3 Faut-il acheter l'extension de garantie ?

6 pts ●●○

Un lave-linge est vendu avec une garantie légale de deux ans. Le vendeur propose une extension de garantie de trois années supplémentaires au prix de 59 euros. Pour ces trois années, on admet qu'il se produit au plus une panne et que, sans extension, le coût X des réparations pour le client, en euros, suit la loi suivante :

Situation	aucune panne	petite panne	remplacement
x_i (euros)	0	100	600
$P(X = x_i)$	0,8	0,16	0,04

- 3.1** Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat. Du seul point de vue de l'espérance, l'extension est-elle intéressante pour le client ?
- 3.2** Calculer $E(X^2)$, puis démontrer que $\sigma(X) = 120$. Pourquoi un client peut-il tout de même choisir l'extension ?
- 3.3** Le vendeur propose aussi une formule « éco » : le client paie 25 euros à l'achat, puis une franchise de 50 euros en cas de panne ; la garantie prend en charge le reste. On note Y la dépense totale du client, en euros, avec cette formule. Donner la loi de Y , puis calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.
- 3.4** Comparer les trois choix (sans extension, extension complète, formule « éco ») à l'aide de l'espérance et de l'écart type de la dépense. Laquelle conseiller à un client qui veut dépenser le moins possible en moyenne tout en limitant le risque ?
- 3.5** Pour le vendeur, le bénéfice sur une extension complète est $B = 59 - X$. Calculer $E(B)$. Quel bénéfice moyen peut-il espérer sur 250 extensions vendues ? À quel prix l'extension complète serait-elle « équitable » pour le client ?

Exercice 4 Simuler des séries de fléchettes

5 pts ●●○

Lors d'un lancer de fléchette, un joueur de niveau moyen marque 0 point avec la probabilité 0,3, 5 points avec la probabilité 0,6 et 10 points avec la probabilité 0,1. On note X le nombre de points marqués lors d'un lancer.

- 4.1** Démontrer que $\mu = E(X) = 4$ et que $\sigma = \sigma(X) = 3$.

```

1 from random import random
2 def lancer():
3     u = random()
4     if u < 0.3:
5         return 0
6     elif u < .....:
7         return 5
8     else:
9         return 10
10
11 def moyenne(n):
12     s = 0
13     for i in range(n):
14         s = s + lancer()
15     return s / n

```

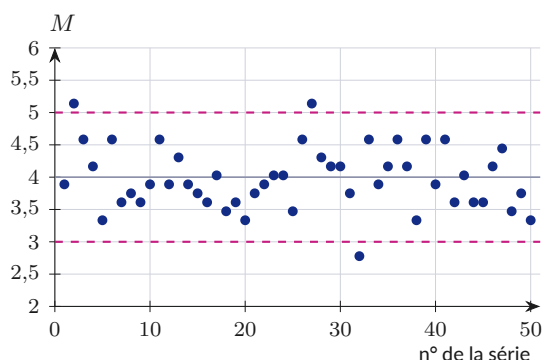


Figure 1 — Moyennes de 50 séries de 36 lancers

- 4.2** La fonction `lancer` simule un lancer de fléchette et renvoie le nombre de points marqués. Recopier et compléter la ligne 6. Que renvoie la fonction `moyenne` ?
- 4.3** On simule 50 séries de $n = 36$ lancers ; la figure 1 représente la moyenne M des points obtenus pour chaque série. Calculer $\mu - 2\sigma/\sqrt{n}$ et $\mu + 2\sigma/\sqrt{n}$, puis déterminer, à l'aide de la figure, la proportion des séries dont la moyenne appartient à l'intervalle $[\mu - 2\sigma/\sqrt{n}; \mu + 2\sigma/\sqrt{n}]$. Commenter.
- 4.4** Quel intervalle obtiendrait-on pour des séries de 144 lancers ? Combien de lancers faudrait-il par série pour que l'intervalle soit $[3,8; 4,2]$?