

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 8

Fiche de cours Trigonométrie

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

1 CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE ET RADIAN

Définition. Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre l'origine O d'un repère orthonormé et de rayon 1, orienté dans le **sens direct** (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Définition. Le **radian** est l'unité d'angle telle qu'un angle au centre de 1 rad intercepte, sur un cercle de rayon r , un arc de longueur r . Comme un demi-tour correspond à un demi-périmètre : $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

Propriété. La conversion degrés $\leftrightarrow$ radians est une **proportionnalité** : $\frac{\alpha \text{ (degrés)}}{180} = \frac{x \text{ (radians)}}{\pi}$. Sur un cercle de rayon r , un angle au centre de $\theta \text{ rad}$ ($\theta \geq 0$) intercepte un arc de longueur $\ell = r\theta$ et délimite un secteur d'aire $\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2\theta$.

2 ENROULEMENT DE LA DROITE DES RÉELS

Définition. En enroulant la droite des réels autour du cercle trigonométrique à partir du point $I(1; 0)$ — sens direct pour les réels positifs, sens indirect pour les négatifs — on associe à tout réel x un unique point M du cercle : son **image**.

Propriété. Deux réels ont la même image si, et seulement si, leur différence est un multiple de 2π : les réels d'image M sont les $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et un seul d'entre eux appartient à $]-\pi; \pi]$: la **mesure principale**.

Méthode — déterminer une mesure principale. Retrancher (ou ajouter) au réel autant de fois 2π que nécessaire pour obtenir un réel de $]-\pi; \pi]$. Avec $x = \frac{p\pi}{q}$, cela revient à modifier p de multiples de $2q$.

3 COSINUS ET SINUS D'UN RÉEL

Définition. Si M est l'image du réel x sur le cercle trigonométrique, alors M a pour coordonnées $(\cos x; \sin x)$: l'abscisse de M est le **cosinus** de x , son ordonnée est le **sinus** de x .

Propriété. Pour tout réel x et tout entier relatif k :

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

Remarque. Pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on retrouve le triangle rectangle : $\cos x = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$, $\sin x = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$. Le point du cercle de centre O et de rayon R associé à x a pour coordonnées $(R \cos x; R \sin x)$.

Méthode — calculer $\cos x$ connaissant $\sin x$. Utiliser $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, puis choisir le signe de $\cos x$ d'après le quadrant où se situe l'image de x .

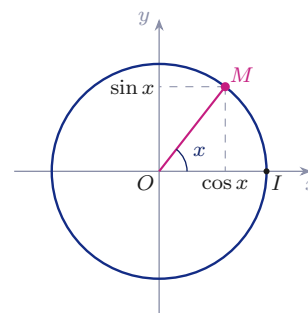


Figure 1 — Le point M , image de x , a pour coordonnées $(\cos x; \sin x)$.

■ FORMULAIRE — Les valeurs remarquables

$x \text{ (rad)}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x \text{ (degrés)}$	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

4 ANGLES ASSOCIÉS

Propriété. Les images de $-x$, de $\pi - x$ et de $\pi + x$ sont les symétriques de celle de x par rapport à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées et au point O . D'où, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x, & \cos(\pi + x) &= -\cos x, \\ \sin(-x) &= -\sin x, & \sin(\pi - x) &= \sin x, & \sin(\pi + x) &= -\sin x.\end{aligned}$$

L'image de $\frac{\pi}{2} - x$ est le symétrique de celle de x par rapport à la droite d'équation $y = x$: $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

Méthode — valeur exacte. Déterminer la mesure principale, placer l'image sur le cercle, reconnaître la symétrie qui la relie à un angle remarquable du premier quadrant, lire le signe sur la figure.

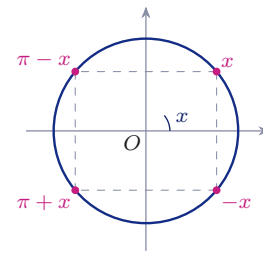


Figure 2 — Les trois symétries du cercle.

5 ÉQUATIONS $\cos x = a$ ET $\sin x = a$

Méthode — résoudre sur le cercle. Si $a \notin [-1; 1]$, pas de solution. Sinon, tracer la droite d'équation $x = a$ (cosinus) ou $y = a$ (sinus) : elle coupe le cercle en deux points (un seul si $a = \pm 1$), dont on lit les réels associés ; on ne garde ensuite que les solutions de l'intervalle demandé.

Propriété. Si x_0 est une solution : $\cos x = a \iff x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = -x_0 + 2k\pi$; $\sin x = a \iff x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = \pi - x_0 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Convertir une mesure d'angle des degrés aux radians et inversement ; calculer une longueur d'arc.
- Placer l'image d'un réel sur le cercle trigonométrique ; déterminer la mesure principale d'un réel.
- Donner les valeurs exactes du cosinus et du sinus d'un angle remarquable ou d'un angle associé.
- Utiliser $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour calculer $\cos x$ connaissant $\sin x$, en justifiant le signe.
- Résoudre graphiquement sur le cercle une équation $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ sur un intervalle donné.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — mesure principale et angle associé

Comme $\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2 \times 2\pi$, la mesure principale de $\frac{25\pi}{6}$ est $\frac{\pi}{6}$: $\cos \frac{25\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{25\pi}{6} = \frac{1}{2}$. De même $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$, dont l'image est dans le deuxième quadrant : $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (négatif) et $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (positif).

★ EXEMPLE — utiliser $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ tel que $\cos x = \frac{3}{5}$. Alors $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, donc $\sin x = \pm \frac{4}{5}$; l'image de x est dans le quatrième quadrant, où le sinus est négatif : $\sin x = -\frac{4}{5}$.

★ EXEMPLE — équation

Résoudre $\sin x = \frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$. La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ coupe le cercle aux images de $\frac{\pi}{6}$ et de $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$: $\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\}$.

✗ PIÈGES

- Un réel n'est pas un angle en degrés : $2 \text{ rad} \approx 114,6^\circ$, donc $\cos 2$ n'a rien à voir avec $\cos 2^\circ$.
- $\cos^2 x$ signifie $(\cos x)^2$, et non $\cos(x^2)$; de même, $\cos(\pi - x) \neq \cos \pi - \cos x$. En passant de $\cos^2 x = k$ à $\cos x$, deux valeurs sont possibles : le signe se décide en repérant le quadrant.
- Une équation $\cos x = a$ avec $-1 \leq a \leq 1$ a deux solutions sur un tour (sauf si $a = \pm 1$) : ne pas en oublier une.