

Exercices 2 Trigonométrie

Application : la roue de vélo, la grande roue, parts de pizza, l'approximation de π par Archimède

4 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Modéliser un mouvement circulaire : angle parcouru en radians, longueur d'arc, vitesse, aire d'un secteur.
- Repérer un point du cercle de centre O et de rayon R associé au réel θ par ses coordonnées $(R \cos \theta ; R \sin \theta)$.
- Résoudre sur le cercle une équation $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ pour répondre à un problème concret.
- Programmer en Python l'approximation de π par la méthode d'Archimède.

Exercice 1 La roue de vélo



Une roue de vélo a un rayon de 35 cm. On assimile la valve V à un point du cercle de centre O (le moyeu) et de rayon 35; dans le repère orthonormé d'origine O lié au cadre du vélo, d'unité le centimètre, le point du cercle associé au réel θ a pour coordonnées $(35 \cos \theta ; 35 \sin \theta)$. Au départ, la valve est au point $(0 ; -35)$. Le vélo roule vers la droite, sans glisser.

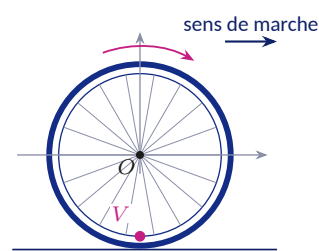


Figure 1 — La roue et sa valve

- 1.1 Quelle distance le vélo parcourt-il quand la roue fait un tour complet? Combien de tours la roue fait-elle, environ, sur un trajet de 1 km?
- 1.2 Quand le vélo roule vers la droite, dans quel sens la roue tourne-t-elle autour de O ? Justifier que, lorsque le vélo a avancé de d cm, la valve est le point du cercle de rayon 35 associé au réel $-\frac{\pi}{2} - \frac{d}{35}$.
- 1.3 Calculer les coordonnées exactes de la valve, puis sa hauteur au-dessus du sol, lorsque le vélo a avancé de $\frac{35\pi}{2}$ cm, puis de $\frac{70\pi}{3}$ cm (on déterminera la mesure principale du réel associé).
- 1.4 Pendant le premier tour de roue, pour quelles distances parcourues la valve se trouve-t-elle à 52,5 cm du sol? Donner les valeurs exactes, puis arrondies au millimètre.

Exercice 2 Parts de pizza



Une part de pizza est un *secteur* de disque : la portion de disque comprise entre deux rayons. Son angle au centre est noté θ (en radians); la croûte de la part est l'arc de cercle qui la borde.

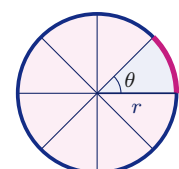


Figure 2 — Une part

- 2.1 L'aire d'un secteur est proportionnelle à son angle au centre. En utilisant l'aire du disque entier, montrer que l'aire d'un secteur d'angle θ d'un disque de rayon r est $\mathcal{A} = \frac{r^2\theta}{2}$. Exprimer aussi $\mathcal{A}$ en fonction de r et de la longueur ℓ de l'arc.
- 2.2 Une pizza de rayon 16 cm est coupée en 8 parts égales. Donner l'angle au centre d'une part, la longueur de sa croûte et son aire (valeurs exactes et arrondies au dixième).
- 2.3 Théo veut, dans cette pizza, une part dont la croûte mesure 10 cm. Quel doit être son angle, en radians puis en degrés (à 0,1 près)? Quelle est son aire?

- 2.4 Une pizza « familiale » a un rayon de 20 cm. Quel doit être l'angle d'une part pour qu'elle ait la même aire qu'un huitième de la pizza de la question 2.2 ? Combien de parts entières de ce type peut-on découper dans la pizza familiale ?

Exercice 3 La grande roue



Une grande roue de 60 m de diamètre porte 24 nacelles régulièrement réparties ; son centre O est à 33 m au-dessus du sol. Elle tourne à vitesse constante dans le sens direct (figure 3) et fait un tour en 12 minutes. À l'instant $t = 0$, la nacelle N de Lina est au point le plus bas. On se place dans le repère orthonormé d'origine O de la figure, d'unité le mètre.

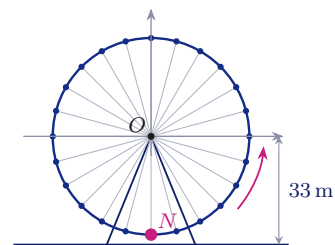


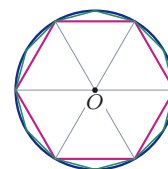
Figure 3 — La grande roue à $t = 0$

- 3.1 Quel est l'angle, en radians, entre deux nacelles consécutives ? Quelle est la longueur de l'arc qui les sépare ? De quel angle la roue tourne-t-elle en une minute ? En déduire la vitesse de la nacelle en $\text{m} \cdot \text{min}^{-1}$.
- 3.2 Justifier qu'à l'instant t (en minutes), N est le point du cercle de rayon 30 associé au réel $\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{6}$, et que sa hauteur au-dessus du sol est $h = 33 + 30 \sin \theta$.
- 3.3 Calculer la hauteur de la nacelle de Lina au bout de 4 minutes, de 9 minutes, puis de 10 minutes.
- 3.4 Pendant combien de temps, au cours d'un tour, la nacelle est-elle à plus de 48 m du sol ? On résoudra sur le cercle une inéquation portant sur $\sin \theta$.
- 3.5 À quels instants du premier tour la nacelle est-elle à la hauteur $33 + 15\sqrt{2}$ mètres ?

Exercice 4 Encadrer π avec Archimède



Vers 250 avant J.-C., Archimède encadre π à l'aide de polygones réguliers inscrits dans un cercle et circonscrits à ce cercle. On étudie ici les polygones **inscrits** dans un cercle de rayon 1, dont la longueur vaut 2π .



hexagone dodécagone

Figure 4 — Polygones inscrits

- 4.1 Un hexagone régulier inscrit dans ce cercle est formé de six triangles équilatéraux de sommet O (figure 4). Quelle est la longueur de ses côtés ? En comparant son périmètre à la longueur du cercle, démontrer que $\pi > 3$.
- 4.2 On admet que si c est la longueur du côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle, alors le côté du polygone régulier inscrit à $2n$ côtés mesure $c' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c^2}}$. Calculer la valeur exacte du côté du dodécagone régulier (12 côtés) inscrit, puis en déduire que $\pi > 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.
- 4.3 La fonction Python ci-contre utilise ce résultat k fois de suite à partir de l'hexagone. Que représentent les valeurs renvoyées ? Que renvoie `archimede(0)` ?
- 4.4 Programmer cette fonction et donner, arrondi à 10^{-5} , le demi-périmètre obtenu pour $k = 1, 2, 3$ et 4. Combien de côtés a le dernier polygone ?
- 4.5 Archimède a démontré que $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$. Le résultat obtenu pour $k = 4$ est-il compatible avec cet encadrement ? Quelle est la plus petite valeur de k pour laquelle le demi-périmètre renvoyé commence par 3,141592 (les six premières décimales de π) ?

```
1 from math import sqrt
2
3 def archimede(k):
4     n = 6
5     c = 1
6     for i in range(k):
7         c = sqrt(2 - sqrt(4 - c**2))
8         n = 2 * n
9     return n, n * c / 2
```