

Approfondissement Trigonométrie

Pour aller plus loin : angle moitié, valeurs en $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{5}$, Archimède, équations sur le cercle, mesure principale en Python

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 3 h · calculatrice et Python (exercices 5 et 6)

Exercice 1 Démonstration : la valeur en $\frac{\pi}{4}$, puis la formule de l'angle moitié



Dans un repère orthonormé d'origine O , on note $I(1; 0)$ et, pour $\theta \in [0; \pi]$, M l'image de θ sur le cercle trigonométrique.

1.1 Cas $\theta = \frac{\pi}{4}$. On note H et K les projetés orthogonaux de M sur les deux axes. Démontrer que $OHMK$ est un carré, dont la diagonale $[OM]$ mesure 1. En déduire $\cos \frac{\pi}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$.

1.2 Longueur d'une corde. Démontrer que $IM^2 = 2 - 2 \cos \theta$.

1.3 Angle moitié (hors programme — pour aller plus loin). Soit J le milieu de $[IM]$ et P l'image de $\frac{\theta}{2}$ (figure 1). On suppose $0 < \theta < \pi$. Justifier que la droite (OJ) est la médiatrice de $[IM]$ et la bissectrice de l'angle $\widehat{IOM}$, donc que P appartient à la demi-droite $[OJ)$ et que $OJ = \cos \frac{\theta}{2}$. En déduire que $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$ et $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$.

1.4 Application : calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et de $\sin \frac{\pi}{8}$, puis de $\cos \frac{7\pi}{8}$ et de $\sin \left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ par lecture du cercle.

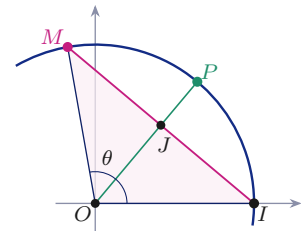


Figure 1 — La corde $[IM]$

Exercice 2 Les valeurs en $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$



2.1 À l'aide de l'exercice 1, démontrer que $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Développer $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$ et en déduire que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Calculer de même $\sin \frac{\pi}{12}$ et vérifier que $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1$.

2.2 Justifier que l'image de $\frac{5\pi}{12}$ est la symétrique de celle de $\frac{\pi}{12}$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. En déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$, puis $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \left(-\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 Équations et inéquations sur le cercle



3.1 Soit a un réel. Démontrer, à l'aide du cercle, que $\cos x = \cos a$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$. Énoncer et justifier le résultat analogue pour $\sin x = \sin a$.

3.2 Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $\cos(2x) = \frac{1}{2}$, puis dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin x = \cos x$.

3.3 Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ (on pourra poser $X = \cos x$), puis l'équation $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 3$.

3.4 En lisant les arcs sur le cercle, résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\cos x > -\frac{1}{2}$, puis dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 4 Le pentagone régulier et le nombre d'or



(Hors programme — pour aller plus loin.) Pour $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$, on note A_k l'image du réel $\frac{2k\pi}{5}$: ces cinq points sont les sommets d'un pentagone régulier (figure 2). On admet que la somme de leurs abscisses est nulle (le pentagone est invariant par la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{5}$). On pose $c = \cos \frac{2\pi}{5}$.

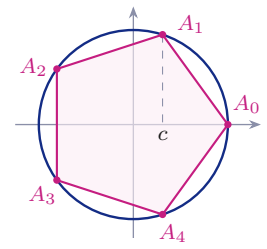


Figure 2 — Pentagone

- 4.1** Justifier par symétrie que $\cos \frac{8\pi}{5} = c$ et $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos \frac{4\pi}{5}$. En déduire que $1 + 2c + 2\cos \frac{4\pi}{5} = 0$.
- 4.2** À l'aide de l'exercice 1, démontrer que $\cos \frac{4\pi}{5} = 2c^2 - 1$, puis que c est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
- 4.3** Résoudre cette équation et en déduire que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, puis que $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, moitié du nombre d'or (remarquer que $\frac{\pi}{5} = \pi - \frac{4\pi}{5}$).
- 4.4** Démontrer que le côté du pentagone mesure $A_0A_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Exercice 5 Archimède et ses deux polygones



Dans un cercle de centre O et de rayon 1, on note c_n le côté du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle, et t_n celui du polygone régulier à n côtés circonscrit au cercle (côtés tangents au cercle). On admet que leurs demi-périmètres encadrent π : $\frac{n c_n}{2} < \pi < \frac{n t_n}{2}$.

- 5.1** Justifier que $c_n^2 = 2 - 2\cos \frac{2\pi}{n}$ (exercice 1), puis, à l'aide de la formule de l'angle moitié, démontrer la formule de doublement : $c_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}$.
- 5.2** Soit H le milieu d'un côté du polygone inscrit. Justifier que $OH = \cos \frac{\pi}{n} = \frac{\sqrt{4 - c_n^2}}{2}$. À l'aide du théorème de Thalès, en déduire que $t_n = \frac{c_n}{OH} = \frac{2c_n}{\sqrt{4 - c_n^2}}$. Calculer c_6 et t_6 , et en déduire que $3 < \pi < 2\sqrt{3}$.
- 5.3** Écrire une fonction Python encadrement (k) qui part de l'hexagone ($n = 6, c = 1$), applique k fois la formule de doublement et renvoie n et les deux demi-périmètres. Vérifier que pour 96 côtés on obtient l'encadrement d'Archimède : $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.
- 5.4** Pour $k = 28$, le demi-périmètre inscrit affiché vaut 0 ! Expliquer pourquoi le calcul de $2 - \sqrt{4 - c^2}$ devient faux sur ordinateur quand c est très petit. Démontrer que $c_{2n} = \frac{c_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - c_n^2}}}$ et vérifier que cette formule corrige le problème.

Exercice 6 Mesure principale en Python et images des réels



- 6.1** Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}, q \neq 0$. En Python, $p \% (2*q)$ est le reste de la division euclidienne de p par $2q$. Démontrer que, si r est l'entier renvoyé par la fonction ci-contre, $\frac{r\pi}{q}$ est la mesure principale de $\frac{p\pi}{q}$.

```
def mesure_principale(p, q):
    r = p % (2 * q)
    if r > q:
        r = r - 2 * q
    return r
```

- 6.2** Déterminer à la main la mesure principale de $\frac{2026\pi}{3}$ et de $-\frac{1001\pi}{4}$, puis contrôler avec la fonction.
- 6.3** (Hors programme — pour aller plus loin.) On admet que π est irrationnel. Démontrer que les images des entiers naturels $0, 1, 2, 3, \dots$ sont deux à deux distinctes : l'enroulement de $\mathbb{N}$ ne « boucle » jamais.