

Sujet type épreuve anticipée

Suites numériques : généralités

Partie 1 : douze questions d'automatismes — Partie 2 : abonnés d'une médiathèque, diagonales d'un polygone, tarifs d'une salle d'escalade

Durée : 2 h · sans calculatrice · QCM et 3 exercices · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

L'usage de la calculatrice est interdit. Le sujet comporte deux parties indépendantes. **Partie 1** : pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, sans justification. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. **Partie 2** : les réponses doivent être justifiées ; la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent dans l'appréciation des copies.

Partie 1 — Automatismes (6 points)

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

6 pts ●○○○

- 1.1** Le nombre $\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}$ est égal à :
- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) 0
- 1.2** Le nombre $\frac{3 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-2}}{6 \times 10^2}$ est égal à :
- a) 2×10^{-1} b) 200 c) 2×10^9 d) 20
- 1.3** Pour tout réel x , l'expression $(x + 3)(x - 3) - (x - 1)^2$ est égale à :
- a) $2x - 10$ b) -10 c) $2x - 8$ d) $-2x - 8$
- 1.4** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(2x - 5)(x + 4) = 0$ est :
- a) $\{4; -\frac{5}{2}\}$ b) $\{-4; \frac{2}{5}\}$ c) $\{-4; \frac{5}{2}\}$ d) $\{\frac{5}{2}\}$
- 1.5** Après une hausse de 25 %, le prix d'un casque audio est de 150 euros. Avant la hausse, il coûtait :
- a) 112,50 euros b) 120 euros c) 125 euros d) 187,50 euros
- 1.6** Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 3 % est :
- a) 0,97 b) 0,7 c) 1,03 d) $-0,03$
- 1.7** La médiane de la série statistique 3 ; 7 ; 8 ; 12 ; 15 ; 20 est :
- a) 8 b) 11 c) 10 d) 12
- 1.8** On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. La probabilité d'obtenir au moins une fois « pile » est :
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{4}$

1.9 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 1$. Le terme u_3 est égal à :

- a) 5 b) 17 c) 35 d) 11

1.10 On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n^2 - 1$. Le terme v_2 est égal à :

- a) 3 b) 4 c) 63 d) 8

1.11 La figure 1 représente une droite d et la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-2; 3]$. Le coefficient directeur de la droite d est :

- a) 3 b) 2 c) $-\frac{1}{2}$ d) -2

1.12 L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ sur $[-2; 3]$ est :

- a) $] -1; 2[$ b) $[-1; 2]$
c) $[-2; -1] \cup [2; 3]$ d) $[0; 1]$

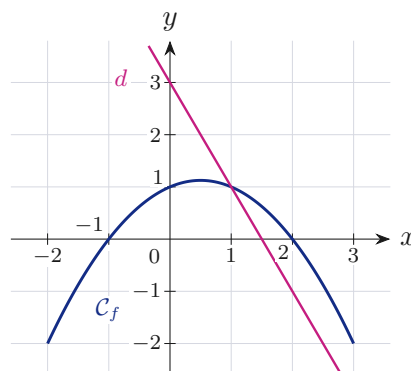


Figure 1 — Questions 1.11 et 1.12

Partie 2 — Exercices (14 points)

Exercice 2 Les abonnés d'une médiathèque

6 pts ●●○

Une médiathèque compte 1 500 abonnés en 2026. Chaque année, 20 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement, et 400 nouvelles personnes s'abonnent. On modélise le nombre d'abonnés en $2026 + n$ par la suite (a_n) , avec $a_0 = 1\,500$.

Partie A — Un premier modèle

2.1 Calculer a_1 et a_2 . Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,8a_n + 400$.

2.2 Montrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} - a_n = 0,2(2\,000 - a_n)$.

2.3 On admet que $a_n < 2\,000$ pour tout entier naturel n . En déduire le sens de variation de la suite (a_n) .

```
1 def annee():
2     n = 0
3     a = 1500
4     while a <= 1900:
5         n = n + 1
6         a = 0.8 * a + 400
7     return 2026 + n
```

2.4 Expliquer ce que renvoie la fonction annee ci-contre, dans le contexte de l'exercice.

2.5 L'appel annee() renvoie 2034. Interpréter ce résultat.

2.6 Un tableur donne $a_{10} \approx 1\,946,3$ et $a_{20} \approx 1\,994,2$. Conjecturer la limite de la suite (a_n) et l'interpréter.

Partie B — Un second modèle

Une autre étude propose de modéliser le nombre d'abonnés en $2026 + n$ par $b_n = \frac{2\,000n + 1\,500}{n + 1}$.

2.7 Vérifier que $b_0 = a_0$ et que, pour tout entier naturel n , $b_n = 2\,000 - \frac{500}{n + 1}$.

2.8 En déduire le sens de variation de la suite (b_n) .

2.9 Déterminer, selon ce second modèle, la première année où la médiathèque comptera plus de 1 900 abonnés. Comparer avec la partie A.

Exercice 3 Les diagonales d'un polygone

4 pts ●●○

Une diagonale d'un polygone est un segment qui joint deux sommets non consécutifs. Pour tout entier $n \geq 3$, on note d_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés. La figure 2 montre les diagonales d'un hexagone.

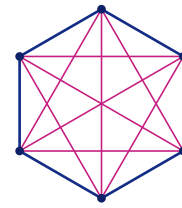


Figure 2 — Hexagone

- 3.1 Donner d_3 , d_4 et d_5 . Lire d_6 sur la figure 2.
- 3.2 Expliquer pourquoi, de chaque sommet d'un polygone à n côtés, partent exactement $n - 3$ diagonales. En déduire que $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.
- 3.3 Montrer que $d_{n+1} - d_n = n - 1$ et en déduire le sens de variation de la suite (d_n) .
- 3.4 Déterminer le polygone qui possède exactement 35 diagonales.
- 3.5 Existe-t-il un polygone convexe possédant exactement 100 diagonales ? Justifier.

Exercice 4 Les tarifs d'une salle d'escalade

4 pts ●●○

Une salle d'escalade propose trois formules pour une année :

- formule A : 12 euros la séance ;
- formule B : une carte d'adhésion de 60 euros, puis 7 euros la séance ;
- formule C : un abonnement illimité de 300 euros.

Pour un nombre n de séances dans l'année, on note a_n , b_n et c_n les prix payés, en euros, avec chacune des formules. La figure 3 représente ces trois suites pour n allant de 0 à 40.

- 4.1 Calculer a_{10} , b_{10} et c_{10} . Exprimer a_n et b_n en fonction de n .
- 4.2 Associer chacun des trois nuages de points de la figure 3 à la formule correspondante.
- 4.3 Déterminer par le calcul à partir de combien de séances la formule B est strictement plus avantageuse que la formule A.
- 4.4 Déterminer par le calcul à partir de combien de séances la formule C est strictement plus avantageuse que la formule B. Contrôler les deux derniers résultats sur la figure 3.
- 4.5 Léna prévoit de grimper entre 20 et 30 fois dans l'année, sans savoir exactement combien. Quelle formule lui conseiller ? Justifier.

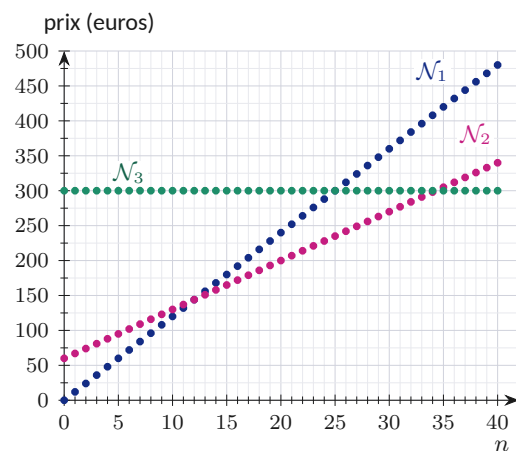


Figure 3 — Prix selon le nombre de séances