

Fiche de cours Suites numériques : généralités

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

1 SUITE NUMÉRIQUE : DÉFINITION ET NOTATIONS

Définition. Une **suite numérique** (u_n) est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur l'ensemble des entiers $n \geq n_0$) et à valeurs réelles. Le réel u_n est le **terme de rang** n ; n est l'**indice**.

Notation. On écrit u_n plutôt que $u(n)$, et (u_n) (ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$) pour désigner la suite tout entière. Ne pas confondre la suite (u_n) et le nombre u_n .

Propriété — trois écritures à distinguer. Pour $u_n = 2n^2 - 3n$: $u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 3(n+1) = 2n^2 + n - 1$, $u_n + 1 = 2n^2 - 3n + 1$, $u_{2n} = 8n^2 - 6n$.

2 MODES DE GÉNÉRATION

Définition. Une suite est définie de façon **explicite** lorsque $u_n = f(n)$: chaque terme se calcule directement à partir de son rang.

Définition. Une suite est définie par **récurrence** lorsqu'on donne son premier terme et une relation $u_{n+1} = f(u_n)$: chaque terme se calcule à partir du précédent, l'un après l'autre.

Remarque. Une suite peut aussi être décrite par un **motif géométrique** (allumettes, carreaux...) ou par un **algorithme**. Passer d'un registre à l'autre — motif, tableau de valeurs, formule, nuage de points — est un attendu du chapitre. Pour une suite récurrente, il faut calculer tous les termes précédents, de proche en proche.

3 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Définition. La représentation graphique d'une suite (u_n) est le **nuage de points** de coordonnées $(n; u_n)$, dans un repère où les rangs sont en abscisse. On ne relie pas les points : la suite n'est définie que pour des entiers.

4 SENS DE VARIATION

Définition. (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n , **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n , **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n (strictement croissante ou décroissante avec des inégalités strictes). Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

■ FORMULAIRE — trois méthodes pour étudier le sens de variation

- **Différence** : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Positif pour tout n : croissante ; négatif : décroissante.
- **Quotient** : si tous les termes sont strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (quotient ≥ 1 : croissante ; ≤ 1 : décroissante) ; adapté aux puissances et aux produits.
- **Fonction associée** : si $u_n = f(n)$ avec f monotone sur $[0; +\infty[$, la suite a le même sens de variation que f . **Valable seulement pour une suite explicite**, jamais pour $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque. Une suite peut n'être monotone qu'à **partir d'un certain rang** : $u_n = n^2 - 9n + 3$ décroît, puis croît à partir du rang 4.

5 LIMITE D'UNE SUITE : APPROCHE INTUITIVE

Définition. (u_n) a pour **limite** le réel ℓ lorsque ses termes deviennent aussi proches de ℓ que l'on veut dès que n est assez grand ; on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et la suite **converge** vers ℓ .

Définition. (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque, quel que soit le nombre A fixé à l'avance, tous ses termes sont supérieurs à A à partir d'un certain rang (de même pour $-\infty$) : la suite **diverge**.

Remarque. Une suite peut n'avoir *aucune* limite : $u_n = (-1)^n$ prend indéfiniment les valeurs 1 et -1 . Elle diverge aussi : une suite qui ne converge pas est dite divergente.

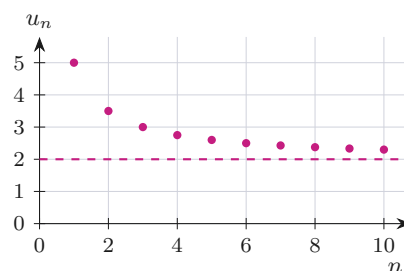


Figure 1 — Suite $u_n = 2 + \frac{3}{n}$: les points se rapprochent de la droite $y = 2$.

6 ALGORITHMIQUE

Méthode — trois algorithmes du chapitre. calculer un terme de rang donné (boucle for), calculer une somme de termes (accumulateur), rechercher un **seuil** : le plus petit rang n tel que u_n dépasse (ou passe sous) une valeur donnée — c'est une boucle while.

```

1 def terme(n):          #  $u_0 = 5$  et  $u_{(n+1)} = 2 u_n - 3$ 
2     u = 5
3     for k in range(n):
4         u = 2 * u - 3
5     return u
6
7 def seuil(S):          # plus petit rang n tel que  $u_n > S$ 
8     u, n = 5, 0
9     while u <= S:
10        u = 2 * u - 3
11        n = n + 1
12    return n

```

7 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Calculer des termes d'une suite explicite ou définie par récurrence ; distinguer u_{n+1} , $u_n + 1$ et u_{2n} .
- Modéliser une situation (motif, évolution, algorithme) par une suite et passer d'un registre à l'autre.
- Représenter une suite par un nuage de points ; lire des termes et un sens de variation sur un graphique.
- Étudier le sens de variation par la différence, par le quotient ou par la fonction associée.
- Conjecturer une limite à partir de termes de grand rang ou d'un nuage de points.
- Écrire un programme Python calculant un terme, une somme de termes ou un seuil.

8 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — sens de variation par la différence

Soit $u_n = n^2 - 5n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 5(n+1) - (n^2 - 5n) = 2n - 4$, qui est négatif pour $n \leq 2$ et positif pour $n \geq 2$. La suite décroît jusqu'au rang 2, puis croît : elle n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.

★ EXEMPLE — sens de variation par le quotient

Soit $u_n = \frac{n}{2^n}$ pour $n \geq 1$: tous les termes sont strictement positifs et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$. Or $n+1 \leq 2n$ dès que $n \geq 1$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$: la suite est décroissante.

★ EXEMPLE — récurrence et conjecture de limite

Soit $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$. Alors $u_1 = \frac{7}{2} = 3,5$, $u_2 = \frac{15}{4} = 3,75$, $u_3 = \frac{31}{8} = 3,875$, $u_4 = 3,9375$: la suite semble croissante et **converger vers 4**. Ici la croissance de $x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$ ne prouve rien : la suite est récurrente.

✖ PIÈGES

- u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$: le premier est le terme suivant, le second est le terme de rang n augmenté de 1.
- La méthode « sens de variation de f » ne vaut que si $u_n = f(n)$. Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, elle est fautive.
- Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 exige de vérifier d'abord que tous les termes sont strictement positifs.
- Une suite croissante n'a pas forcément pour limite $+\infty$: $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ croît et converge vers 2.
- Sur un nuage de points, ne pas relier les points : entre deux entiers consécutifs, la suite n'est pas définie.