

Exercices 1 Suites numériques : généralités

Les bases : calculer des termes, représenter, étudier le sens de variation

9 exercices · niveau ●○○ · durée conseillée : 1 h 30 · sans calculatrice

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Calculer des termes d'une suite définie de façon explicite ou par une relation de récurrence; ne pas confondre u_{n+1} , $u_n + 1$ et u_{2n} .
- Représenter une suite par un nuage de points; passer d'un registre à l'autre.
- Étudier le sens de variation d'une suite par trois méthodes; conjecturer une limite.

■ RAPPEL — L'essentiel du chapitre

- **Explicite** : $u_n = f(n)$, on calcule directement n'importe quel terme. **Récurrence** : on donne u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$; chaque terme se calcule à partir du précédent.
- Représentation graphique : l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$, que l'on ne relie pas.
- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n , **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n (strictement : inégalités strictes). Trois méthodes : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$; si tous les termes sont strictement positifs, comparer u_{n+1}/u_n à 1; si $u_n = f(n)$ avec f monotone sur $[0; +\infty[$, la suite a le même sens de variation que f .
- Limite (approche intuitive) : (u_n) tend vers ℓ si ses termes deviennent aussi proches de ℓ que l'on veut pour n assez grand; elle tend vers $+\infty$ si, pour tout nombre A , ses termes sont tous supérieurs à A à partir d'un certain rang.

Exercice 1 Calculer des termes d'une suite explicite

●○○

Pour chacune des suites définies pour tout entier naturel n , calculer les termes de rangs 0, 1, 2 et 10.

- a) $u_n = 4n - 7$ b) $v_n = n^2 - 3n$ c) $w_n = \frac{12}{n+2}$ d) $t_n = 2^n - n$

Exercice 2 Calculer des termes d'une suite définie par récurrence

●○○

- 2.1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
- 2.2 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{1+v_n}$. Calculer v_1 , v_2 et v_3 sous forme de fractions irréductibles.
- 2.3 Soit (w_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $w_1 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + 2n + 1$. Calculer w_2 , w_3 , w_4 et w_5 . Quelle expression de w_n en fonction de n peut-on conjecturer?

Exercice 3 Ne pas confondre

●○○

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 3n$.

- 3.1 Exprimer en fonction de n , sous forme développée et réduite, les nombres suivants.

- a) u_{n+1} b) $u_n + 1$ c) u_{2n} d) $2u_n$ e) $u_{n+1} - u_n$

- 3.2 Vérifier les résultats pour $n = 3$ en calculant u_3 , u_4 et u_6 .

Exercice 4 Conjecturer une limite

●○○

Les suites sont définies pour $n \geq 1$. Pour chacune, calculer les termes de rangs 10, 100 et 1 000 (et aussi de rangs 11, 101 et 1 001 pour (w_n)), puis conjecturer la limite éventuelle de la suite.

a) $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ b) $v_n = 5n - n^2$ c) $w_n = (-1)^n \times 4$ d) $t_n = 1 - \frac{2}{n}$

Exercice 5 Un motif d'allumettes

●○○

On construit des rangées de carrés avec des allumettes. On note a_n le nombre d'allumettes nécessaires pour une rangée de n carrés ($n \geq 1$).

- 5.1 Donner a_1, a_2, a_3 , puis a_4 .
 5.2 Expliquer pourquoi, pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$.
 5.3 Justifier que $a_n = 3n + 1$ et calculer a_{50} .
 5.4 Avec 100 allumettes, combien de carrés peut-on aligner au plus ?

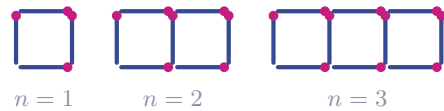


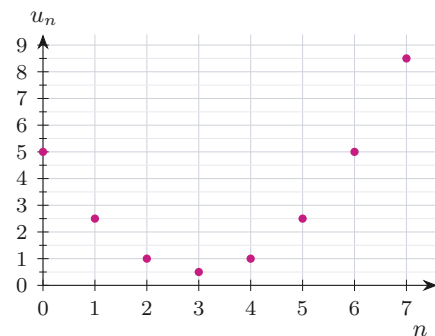
Figure 1 — Rangées de 1, 2 et 3 carrés

Exercice 6 Lire un nuage de points

●○○

On a représenté ci-contre les huit premiers termes d'une suite (u_n) définie de façon explicite.

- 6.1 Lire les valeurs de $u_0, u_1, \dots, u_7$.
 6.2 Décrire le sens de variation apparent de (u_n) .
 6.3 Une seule des expressions $5 - 2n$, $\frac{1}{2}n^2 - 3n + 5$ et $\frac{1}{2}n^2 - 3n + 4$ peut être celle de u_n . Laquelle ? Justifier.
 6.4 Calculer u_{10} avec l'expression retenue.

Figure 2 — Les points $(n; u_n)$

Exercice 7 Sens de variation : signe de la différence

●●○

Étudier, à l'aide du signe de la différence de deux termes consécutifs, le sens de variation des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 3n - 1$, $v_n = 7 - 5n$, $t_n = \frac{1}{n+1}$, et la suite (w_n) définie par $w_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n - n^2 - 1$.

Exercice 8 Sens de variation : quotient de deux termes consécutifs

●●○

- 8.1 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2^n}{n+1}$. Justifier que tous ses termes sont strictement positifs, montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{n+2}$, puis en déduire le sens de variation de (u_n) .
 8.2 Même question pour la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = \frac{n}{3^n}$, en montrant que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{3n}$.

Exercice 9 Sens de variation à l'aide d'une fonction

●●○

Écrire chaque terme général sous la forme $f(n)$, étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$ et conclure.

a) $a_n = \frac{3}{n+2}$ b) $b_n = -2n^2 - 4n + 5$ c) $c_n = \sqrt{2n+5}$

Montrer que la suite définie par $d_n = n^2 - 9n + 3$ n'est pas monotone, mais qu'elle est croissante à partir du rang 4.