

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 2

Contrôle B Suites numériques : généralités

Vrai ou faux, quotient et second degré, Sierpiński, une suite qui hésite

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Tout résultat doit être justifié ; dans l'exercice 1, une réponse « vrai » ou « faux » non justifiée ne rapporte aucun point. Les résultats sont donnés sous forme exacte. La qualité de la rédaction et la rigueur des raisonnements sont prises en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

5 pts ●●○

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Un contre-exemple suffit pour justifier qu'une affirmation est fausse.

- 1.1 La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 10n$ est croissante.
- 1.2 La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{n+3}{n+1}$ est décroissante.
- 1.3 Si une suite est croissante, alors elle tend vers $+\infty$.
- 1.4 Si f est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = f(w_n)$ est croissante.
- 1.5 Si une suite (t_n) vérifie $t_{n+1} - t_n = (-1)^n$ pour tout entier naturel n , alors elle n'est ni croissante, ni décroissante.

Exercice 2 Quotient et second degré

5 pts ●●○

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

- 2.1 Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 . La suite (u_n) est-elle monotone ?
- 2.2 Justifier que tous les termes de la suite sont strictement positifs, puis montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}.$$

- 2.3 Montrer que, pour $n \geq 1$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \iff n^2 - 2n - 1 \geq 0$.
- 2.4 Résoudre l'inéquation $x^2 - 2x - 1 \geq 0$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un rang que l'on précisera.
- 2.5 On donne $2^{10} = 1\,024$ et $2^{20} = 1\,048\,576$. Calculer u_{10} et donner un ordre de grandeur de u_{20} . Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 Le triangle de Sierpiński

5 pts ●●●○

On part d'un triangle équilatéral noir de côté 1 (étape 0). À chaque étape, chaque triangle noir est partagé en quatre triangles équilatéraux en joignant les milieux de ses côtés, et on retire (en blanc) le triangle central. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note t_n le nombre de triangles noirs, c_n la longueur du côté de chacun d'eux, A_n l'aire totale noire et P_n la somme des périmètres des triangles noirs à l'étape n .



Figure 1 — Les étapes 0, 1 et 2

- 3.1** Donner t_0, t_1, t_2 et c_0, c_1, c_2 . Justifier que, pour tout n , $t_{n+1} = 3t_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$.
- 3.2** Justifier que $A_{n+1} = \frac{3}{4}A_n$ pour tout n , avec $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. En déduire le sens de variation de la suite (A_n) .
- 3.3** Exprimer P_n en fonction de t_n et c_n . En déduire que $P_{n+1} = \frac{3}{2}P_n$, puis le sens de variation de (P_n) .
- 3.4** On donne : $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0,056$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{50} \approx 5,7 \times 10^{-7}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{10} \approx 57,7$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^{50} \approx 6,4 \times 10^8$. On admet que $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$ et $P_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n P_0$. Conjecturer les limites des suites (A_n) et (P_n) . Qu'a de surprenant cette figure lorsque n devient très grand ?

Exercice 4 Une suite qui hésite

5 pts ●●●○

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$, représentée ci-contre avec la droite Δ d'équation $y = x$. Pour un réel a , on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

- 4.1** Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 2)^2}{4}.$$

En déduire que, quelle que soit la valeur de a , la suite (u_n) est croissante.

- 4.2** Cas $a = 0$. Calculer u_1, u_2 et u_3 . Construire sur la figure 2 les premiers termes, puis conjecturer la limite de la suite.
- 4.3** Cas $a = 3$. Calculer u_1 et u_2 .

- a) On admet que, dans ce cas, $u_n \geq 3$ pour tout n . Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{4}$.
- b) En déduire que $u_n \geq 3 + \frac{n}{4}$ pour tout n (on pourra écrire $u_n - u_0$ comme la somme des différences $u_{k+1} - u_k$ pour k allant de 0 à $n - 1$), puis donner un rang à partir duquel $u_n \geq 100$. Quelle limite peut-on conjecturer ?

- 4.4** Sans justification, conjecturer à l'aide de la figure 2 le comportement de la suite selon que $0 \leq a \leq 2$ ou $a > 2$.

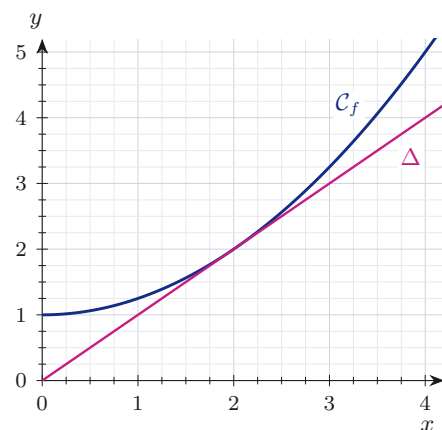


Figure 2 — À compléter et à rendre avec la copie