

Sujet type épreuve anticipée

Suites arithmétiques et géométries

Partie 1 : douze questions d'automatismes — Partie 2 : réduire ses déchets, sommes et second degré, un triangle dans un rectangle

Durée : 2 h · sans calculatrice · QCM et 3 exercices · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

L'usage de la calculatrice est interdit. Le sujet comporte deux parties indépendantes. **Partie 1** : pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, sans justification. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. **Partie 2** : les réponses doivent être justifiées ; la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent dans l'appréciation des copies.

Partie 1 — Automatismes (6 points)

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

6 pts ●○○○

- 1.1** Le nombre $\sqrt{50} - \sqrt{18}$ est égal à :
- a) $\sqrt{32}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $8\sqrt{2}$ d) 4
- 1.2** La valeur de $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \div \frac{2}{3}$ est :
- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{18}$ c) 0 d) $\frac{1}{9}$
- 1.3** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(2x - 1)(x + 3) = 0$ est :
- a) $\left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$ b) $\{2; -3\}$ c) $\{1; -3\}$ d) $\left\{\frac{1}{2}; -3\right\}$
- 1.4** Pour tout réel x , l'expression $(x - 5)(x + 5) - (x - 5)^2$ est égale à :
- a) $10x - 50$ b) -50 c) $2x^2 - 10x$ d) $10x$
- 1.5** L'expression $-3x + 6$ est strictement positive si et seulement si x appartient à :
- a) $]2; +\infty[$ b) $] -\infty; 2[$ c) $] -\infty; -2[$ d) $] -2; +\infty[$
- 1.6** Le prix d'un casque audio passe de 80 euros à 92 euros. Le taux d'évolution de ce prix est :
- a) +12 % b) +115 % c) +1,15 % d) +15 %
- 1.7** Un loyer augmente de 10 % par an pendant trois années consécutives. Sur l'ensemble des trois années, il a augmenté de :
- a) 30 % b) 33,1 % c) 31 % d) 3,31 %
- 1.8** (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison -2 . Le terme u_{10} est égal à :
- a) -11 b) -3 c) -13 d) 27

1.9 La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre représente une fonction f définie sur $[-3; 4]$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est :

- a) $] -2; 3[$ b) $] -2; 3]$
 c) $[-3; -2[\cup]3; 4]$ d) $] -3; 4[$

1.10 Le coefficient directeur de la droite d tracée ci-contre est :

- a) 2 b) -2 c) 1 d) $\frac{1}{2}$

1.11 La boîte à moustaches ci-dessous résume les temps de trajet, en minutes, des élèves d'une classe. L'écart interquartile de cette série est :

- a) 15 b) 3 c) 6 d) 11

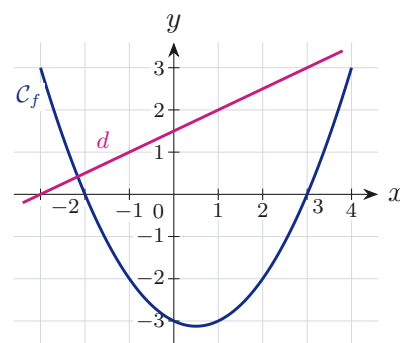


Figure 1 — Questions 1.9 et 1.10

1.12 On choisit au hasard un élève d'un lycée. On note A l'événement « l'élève est interne » et B l'événement « l'élève est inscrit à l'association sportive ». Le tableau ci-dessous donne les effectifs. La probabilité $P(B)$ est égale à :

- a) 0,12 b) 0,26
 c) 0,6 d) 0,14

	B	$\overline{B}$	Total
A	60	90	150
$\overline{A}$	70	280	350
Total	130	370	500

Partie 2 — Exercices (14 points)

Exercice 2 Réduire ses déchets

6 pts ●●○

En 2025, chaque habitant d'une commune a produit en moyenne 500 kg de déchets ménagers. La commune veut atteindre l'objectif de 300 kg par habitant et par an, et étudie deux plans :

- **plan A** : diminuer la quantité de déchets de 20 kg par habitant chaque année ;
- **plan B** : diminuer la quantité de déchets de 5 % chaque année.

On note a_n et b_n les quantités de déchets, en kg par habitant, produites en l'année $2025 + n$ avec les plans A et B ; ainsi $a_0 = b_0 = 500$.

■ **DONNÉES** — Valeurs approchées utiles $0,95^9 \approx 0,630$ • $0,95^{10} \approx 0,599$ • $0,95^{13} \approx 0,513$ • $0,95^{14} \approx 0,488$

Partie A — Le plan A

- 2.1** Calculer a_1 et a_2 . Justifier que (a_n) est arithmétique et exprimer a_n en fonction de n .
2.2 En quelle année l'objectif de 300 kg sera-t-il atteint avec le plan A ?
2.3 Calculer la quantité totale de déchets produite par un habitant de 2025 à 2034 inclus, avec le plan A.

Partie B — Le plan B

- 2.4** Calculer b_1 et b_2 . Justifier que (b_n) est géométrique, exprimer b_n en fonction de n et donner son sens de variation.
2.5 À l'aide des valeurs approchées fournies, montrer que l'objectif est atteint en 2035 avec le plan B, mais pas en 2034.
2.6 Montrer que la quantité totale de déchets produite par un habitant de 2025 à 2034 inclus avec le plan B est égale à $10\,000 \times (1 - 0,95^{10})$, puis en donner une valeur approchée. Quel plan est le plus favorable sur cette période ?

- 2.7** La commune se fixe ensuite l'objectif de 250 kg par habitant. Recopier et compléter la ligne 6 de la fonction Python ci-contre pour qu'elle renvoie l'année où cet objectif est atteint avec le plan B, puis déterminer la valeur renvoyée.

```

1 def annee():
2     n = 0
3     b = 500
4     while b > 250:
5         n = n + 1
6         b = .....
7     return 2025 + n

```

Exercice 3 Des sommes et une équation du second degré

4 pts ●●○

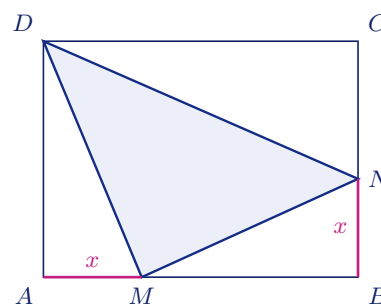
- 3.1** Déterminer l'entier naturel n tel que $1 + 2 + 3 + \dots + n = 210$.
- 3.2** (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 4. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
- a) Montrer que $S_n = (n + 1)(2n + 3)$.
- b) Déterminer l'entier n tel que $S_n = 253$.
- 3.3** Déterminer l'entier naturel n tel que $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = 1\,093$.
- 3.4** (v_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $v_0 = 2$ et $v_0 + v_1 + v_2 = 26$. Déterminer q .

Exercice 4 Un triangle dans un rectangle

4 pts ●●○

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 6$ cm. Pour un réel x de l'intervalle $[0; 6]$, on place le point M sur $[AB]$ tel que $AM = x$ et le point N sur $[BC]$ tel que $BN = x$ (en cm). On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire, en cm^2 , du triangle DMN .

- 4.1** Calculer $\mathcal{A}(0)$ et $\mathcal{A}(6)$.
- 4.2** Exprimer en fonction de x les aires des triangles AMD , MBN et NCD . En déduire que, pour tout $x \in [0; 6]$, $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 24$.
- 4.3** Montrer que $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + \frac{39}{2}$. En déduire la position de M pour laquelle l'aire du triangle DMN est minimale, et cette aire minimale.
- 4.4** Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du triangle DMN est inférieure ou égale à 20 cm^2 .
- 4.5** L'aire du triangle DMN peut-elle être égale au tiers de l'aire du rectangle $ABCD$? Justifier.

Figure 2 — Le triangle DMN