

Fiche de cours Suites arithmétiques et géométriques

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 SUITES ARITHMÉTIQUES

Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r , appelé **raison**, tel que, pour tout n ,

$$u_{n+1} = u_n + r, \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_{n+1} - u_n = r.$$

On passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre.

Propriété — terme général. Si (u_n) est arithmétique de raison r , alors, pour tous entiers n et p :

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{et, plus généralement,} \quad u_n = u_p + (n - p)r.$$

Démonstration : de u_0 à u_n , on ajoute n fois la raison r .

Propriété — sens de variation et représentation. (u_n) est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$, constante si $r = 0$. Les points $(n; u_n)$ sont **alignés** sur la droite d'équation $y = rx + u_0$: une suite arithmétique est l'analogue discret d'une **fonction affine**, et modélise une évolution à **accroissements constants**.

2 SUITES GÉOMÉTRIQUES

Définition. Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q , appelé **raison**, tel que, pour tout n , $u_{n+1} = q u_n$. Si aucun terme n'est nul, cela équivaut à : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ pour tout n . On passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre.

Propriété — terme général. Si (u_n) est géométrique de raison q , alors $u_n = u_0 q^n$ et, plus généralement, pour tous entiers $n \geq p$, $u_n = u_p q^{n-p}$. **Démonstration :** de u_0 à u_n , on multiplie n fois par q .

Propriété — sens de variation. Pour $u_0 > 0$ et $q > 0$: la suite est strictement croissante si $q > 1$, constante si $q = 1$, strictement décroissante si $0 < q < 1$. Les sens sont **échangés** si $u_0 < 0$. Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, la suite n'est pas monotone : les termes changent de signe alternativement. Une suite géométrique modélise une évolution à **taux constant** (croissance ou décroissance exponentielle).

3 ÉVOLUTIONS EN POURCENTAGE

Propriété. Augmenter de $t\%$ revient à multiplier par le **coefficient multiplicateur** $CM = 1 + \frac{t}{100}$; diminuer de $t\%$, à multiplier par $1 - \frac{t}{100}$. Des évolutions successives se traduisent par le **produit** des coefficients multiplicateurs ; l'évolution **réciroque** correspond au coefficient $\frac{1}{CM}$.

Remarque. Une grandeur qui évolue de $t\%$ à chaque période engendre donc une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$: après n périodes, elle a été multipliée par $(1 + \frac{t}{100})^n$.

4 SOMMES DE TERMES CONSÉCUTIFS

■ FORMULAIRE — les quatre formules à connaître

- $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; pour $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- Suite **arithmétique** : somme = (nombre de termes) $\times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.
- Suite **géométrique** de raison $q \neq 1$: somme = (premier terme) $\times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.
- Nombre de termes de u_p à u_n : $n - p + 1$ (ne pas oublier le +1).

Méthode — démonstration de $1 + 2 + \dots + n$. Écrire la somme S deux fois, la seconde à l'envers, et additionner terme à terme : on obtient n paires valant chacune $n + 1$, donc $2S = n(n + 1)$. Pour la somme géométrique, calculer $S - qS$: tous les termes se simplifient sauf deux.

5 SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE (AVEC SUITE AUXILIAIRE FOURNIE)

Méthode — $u_{n+1} = a u_n + b$. L'énoncé fournit une suite auxiliaire $v_n = u_n - \ell$. On montre que (v_n) est géométrique de raison a , on écrit $v_n = v_0 a^n$, puis on revient à $u_n = v_n + \ell$.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Reconnaître et démontrer la nature d'une suite : calculer $u_{n+1} - u_n$ (arithmétique) ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (géométrique) et vérifier que le résultat est constant.
- Déterminer la raison et le premier terme connaissant deux termes, puis exprimer u_n en fonction de n .
- Donner le sens de variation ; déterminer un rang à partir duquel un seuil est atteint.
- Modéliser une croissance linéaire ou exponentielle (intérêts, population, abonnements, loyers).
- Calculer une somme de termes consécutifs après avoir compté les termes.
- Exploiter une suite auxiliaire fournie pour étudier une suite arithmético-géométrique.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — retrouver une suite arithmétique à partir de deux termes

(w_n) est arithmétique avec $w_5 = 17$ et $w_{12} = 45$. Alors $w_{12} = w_5 + 7r$, donc $r = \frac{45-17}{7} = 4$ et $w_0 = w_5 - 5r = 17 - 20 = -3$: $w_n = -3 + 4n$. Le rang n tel que $w_n = 197$ vérifie $4n = 200$, soit $n = 50$.

★ EXEMPLE — retrouver une suite géométrique à partir de deux termes

(w_n) est géométrique à termes positifs avec $w_2 = 18$ et $w_5 = 486$. Alors $w_5 = w_2 q^3$, donc $q^3 = \frac{486}{18} = 27$ et $q = 3$; puis $w_0 = \frac{w_2}{q^2} = \frac{18}{9} = 2$ et $w_n = 2 \times 3^n$.

★ EXEMPLE — sommes

$S = 3 + 7 + 11 + \dots + 79$ est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4 : elle compte $\frac{79-3}{4} + 1 = 20$ termes, donc $S = 20 \times \frac{3+79}{2} = 820$. De même $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10} = \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2^{11} - 1 = 2047$.

★ EXEMPLE — évolution à taux constant

Un loyer de 700 euros augmente de 2 % par an : $L_n = 700 \times 1,02^n$, suite géométrique de raison 1,02. Au bout de 5 ans, $L_5 = 700 \times 1,02^5 \approx 772,86$ euros, soit une hausse globale d'environ 10,4 % — et non de 10 %.

✗ PIÈGES

- « Il suffit de vérifier sur trois termes » : non. Pour démontrer la nature d'une suite, calculer $u_{n+1} - u_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout n .
- $u_n = u_0 q^n$ et non $u_0^n q$; et si la suite commence à u_1 , alors $u_n = u_1 q^{n-1}$: compter les pas, pas les rangs.
- Le nombre de termes de u_0 à u_n est $n + 1$, pas n : c'est l'erreur la plus fréquente dans les sommes.
- Deux hausses de 10 % ne font pas une hausse de 20 % : $1,1 \times 1,1 = 1,21$, soit +21 %.
- Une baisse de 20 % suivie d'une hausse de 20 % ne ramène pas à la valeur initiale : $0,8 \times 1,2 = 0,96$.