

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 3

Contrôle B Suites arithmétiques et géométriques

Somme géométrique, vrai ou faux, trois termes, choisir un bail, carrés emboîtés

Durée : 1 h · calculatrice autorisée · 5 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

La calculatrice est autorisée. Tout résultat doit être justifié ; dans l'exercice 2, une réponse « vrai » ou « faux » non justifiée ne rapporte aucun point. Les valeurs exactes sont attendues lorsqu'elles sont demandées. La qualité de la rédaction et la rigueur des démonstrations sont prises en compte dans la notation.

Exercice 1 Démonstration : somme des termes d'une suite géométrique

3 pts ●●○

Soit q un réel différent de 1 et n un entier naturel. On pose $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$.

- 1.1 Écrire qS sous forme d'une somme, puis démontrer que $S - qS = 1 - q^{n+1}$. En déduire que $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- 1.2 *La légende de l'échiquier.* On pose un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite en doublant à chaque case jusqu'à la 64^e. Exprimer le nombre total de grains sous la forme $2^k - 1$.
- 1.3 Calculer la valeur exacte de $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^8}$, sous forme de fraction irréductible.
- 1.4 Calculer $3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 3 \times 2^{10}$.

Exercice 2 Vrai ou faux ?

5 pts ●●○

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Un contre-exemple suffit pour justifier qu'une affirmation est fausse.

- 2.1 Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- 2.2 La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^{n+1}$ est géométrique, de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
- 2.3 Si (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 dont le premier terme u_0 est un entier, alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2^{u_n}$ est géométrique de raison 8.
- 2.4 Un prix qui augmente de 5 % par an pendant 10 ans a augmenté, au total, de 50 %.
- 2.5 La somme des vingt premiers nombres entiers impairs, $1 + 3 + 5 + \dots + 39$, est égale à 400.

Exercice 3 Trois termes consécutifs

3 pts ●●○

- 3.1 Trois nombres réels sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ; leur somme vaut 15 et leur produit vaut 80. Déterminer ces trois nombres. On pourra les noter $a - r$, a et $a + r$.
- 3.2 Trois nombres réels non nuls sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique ; leur somme vaut 21 et leur produit vaut 216. Déterminer ces trois nombres. On pourra les noter $\frac{a}{q}$, a et aq .

Exercice 4 Choisir un bail commercial

5 pts ●●●○

Une commerçante doit louer un local pour sa boutique. Le propriétaire lui propose deux formules de loyer annuel :

- **formule A** : 12 000 euros la première année, puis une augmentation de 600 euros chaque année ;
- **formule B** : 11 000 euros la première année, puis une augmentation de 6 % chaque année.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note a_n et b_n les loyers, en euros, de la n -ième année avec les formules A et B. La figure 1 représente ces loyers pour les douze premières années.

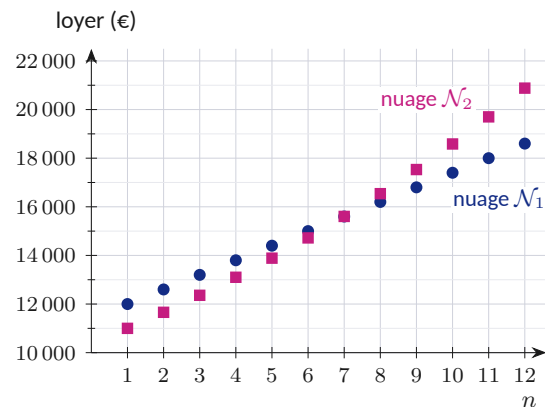


Figure 1 — Loyers annuels : nuage $\mathcal{N}_1$ (ronds), nuage $\mathcal{N}_2$ (carrés)

- 4.1 Calculer a_2 et b_2 . Préciser la nature des suites (a_n) et (b_n) , puis exprimer a_n et b_n en fonction de n . Associer chaque formule à l'un des nuages de points de la figure 1, en justifiant.
- 4.2 Comparer les loyers de la 9^e année dans les deux formules (arrondir à l'euro).
- 4.3 À partir de quelle année le loyer de la formule B dépasse-t-il celui de la formule A ?
- 4.4 Calculer, pour chaque formule, le montant total des loyers payés sur 9 ans (arrondir à l'euro).
- 4.5 La commerçante hésite entre un bail de 9 ans et un bail de 12 ans. Quelle formule lui conseiller dans chacun des deux cas ? Justifier, puis expliquer pourquoi le classement des deux formules peut changer selon la durée du bail.

Exercice 5 Des carrés emboîtés

4 pts ●●●○

Le carré $\mathcal{C}_0$ a pour côté 8 cm. Pour tout entier naturel n , on construit le carré $\mathcal{C}_{n+1}$ en joignant les milieux des côtés du carré $\mathcal{C}_n$ (figure 2). On note c_n la longueur du côté, en cm, et a_n l'aire, en cm^2 , du carré $\mathcal{C}_n$.

- 5.1 Calculer a_0 . Montrer que $c_1 = 4\sqrt{2}$ et en déduire a_1 .
- 5.2 En décomposant le carré $\mathcal{C}_n$ en $\mathcal{C}_{n+1}$ et en quatre triangles rectangles isocèles, justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$. En déduire l'expression de a_n en fonction de n .
- 5.3 À partir de quel rang l'aire du carré $\mathcal{C}_n$ est-elle inférieure à $0,1 \text{ cm}^2$?

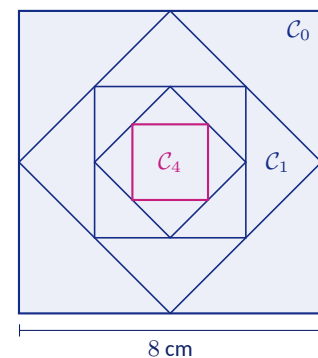


Figure 2 — Les carrés $\mathcal{C}_0$ à $\mathcal{C}_4$

- 5.4 Calculer la somme des aires des dix carrés $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_9$. Démontrer que, quel que soit le nombre de carrés dessinés, la somme de leurs aires reste strictement inférieure à 128 cm^2 .
- 5.5 Justifier que la suite (c_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$, puis calculer la valeur exacte du périmètre du carré $\mathcal{C}_6$.