

Fiche de cours

Second degré

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

1 TRINÔME DU SECOND DEGRÉ ET FORMES D'ÉCRITURE

Définition. Une **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

C'est la **forme développée**; a , b et c sont les **coefficients**. Sa courbe est une **parabole**.

Propriété — trois formes d'un même trinôme. Tout trinôme s'écrit sous **forme canonique** $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Il s'écrit sous **forme factorisée** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ *uniquement* lorsqu'il admet des racines (voir bloc 3).

Remarque. Chaque forme a son usage : développée pour lire a , b , c ; canonique pour l'extremum et les variations; factorisée pour les racines et le signe.

2 FORME CANONIQUE, SOMMET ET VARIATIONS

Propriété. La parabole représentant f admet pour sommet le point $S(\alpha; \beta)$ et f atteint en α un extremum égal à β : un **minimum** si $a > 0$, un **maximum** si $a < 0$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

Cas $a < 0$

Méthode — obtenir la forme canonique. calculer $\alpha = -\frac{b}{2a}$ puis $\beta = f(\alpha)$; ou bien factoriser a et compléter le carré, par exemple $x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$.

3 DISCRIMINANT, RACINES ET RÉOLUTION DE $ax^2 + bx + c = 0$

Définition. Le **discriminant** du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème — résolution de l'équation du second degré. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$:

■ FORMULAIRE

- si $\Delta > 0$: **deux racines distinctes** $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- si $\Delta = 0$: une **racine double** $x_0 = -\frac{b}{2a} = \alpha$ et $f(x) = a(x - x_0)^2$;
- si $\Delta < 0$: **aucune racine réelle**; $f(x)$ ne se factorise pas et garde le signe de a .

Idée de la démonstration : la forme canonique s'écrit $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$; on conclut par l'identité $A^2 - B^2$ si $\Delta > 0$, par le signe d'une somme de carrés si $\Delta < 0$.

Propriété — somme et produit. Si f admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales), alors

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Réciproquement, deux réels de somme s et de produit p sont les racines de $X^2 - sX + p = 0$: ils existent si et seulement si $s^2 \geq 4p$.

4 SIGNE DU TRINÔME ET INÉQUATIONS

Propriété. Lorsque $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a à l'**extérieur** des racines et du signe de $-a$ **entre** les racines. Lorsque $\Delta \leq 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x (nul en x_0 si $\Delta = 0$).

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+

Figure 1 — Signe de $f(x)$ dans le cas $\Delta > 0$ et $a > 0$, avec $x_1 < x_2$. Pour $a < 0$, tous les signes de la dernière ligne sont échangés.

Méthode — résoudre une inéquation du second degré. tout ramener dans un seul membre, calculer Δ , déterminer les racines, dresser le tableau de signes, puis lire les solutions sous forme d'intervalles.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Passer d'une forme à l'autre : développer, mettre sous forme canonique, factoriser.
- Résoudre une équation du second degré avec le discriminant, ou *sans* : racine évidente, somme et produit, identité remarquable.
- Étudier le signe d'un trinôme et résoudre une inéquation du second degré.
- Déterminer les racines et le sommet de la parabole ; dresser le tableau de variations.
- Choisir la forme adaptée pour un problème d'optimisation (aire, bénéfice) ou pour une lecture graphique.
- Déterminer deux réels connaissant leur somme et leur produit.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — équation, factorisation et signe

Soit $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$. Alors $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 5$, $x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$ et $x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$, donc $f(x) = 2(x+2)(x-\frac{1}{2})$. Comme $a > 0$: $f(x) > 0$ sur $]-\infty; -2[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$ et $f(x) < 0$ sur $]-2; \frac{1}{2}[$.

★ EXEMPLE — inéquation

Résoudre $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$. Ici $\Delta = 9 + 16 = 25$ et les racines sont $\frac{-3-5}{-4} = 2$ et $\frac{-3+5}{-4} = -\frac{1}{2}$. Comme $a = -2 < 0$, le trinôme est positif *entre* les racines : $S = [-\frac{1}{2}; 2]$.

★ EXEMPLE — optimisation par la forme canonique

Soit $B(x) = -2x^2 + 12x - 7$. On a $\alpha = -\frac{12}{-4} = 3$ et $\beta = B(3) = -18 + 36 - 7 = 11$, donc $B(x) = -2(x-3)^2 + 11$. Comme $a < 0$, B admet un **maximum** égal à 11, atteint pour $x = 3$.

★ EXEMPLE — racine évidente et produit des racines

Soit $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$. Comme $3 - 8 + 5 = 0$, 1 est racine ; le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, donc l'autre racine est $\frac{5}{3}$ et $f(x) = 3(x-1)(x-\frac{5}{3})$: aucun discriminant à calculer.

✗ PIÈGES

- $\Delta = b^2 - 4ac$: ne pas oublier les signes de b et de c ; $(-3)^2 = 9$ et $-4 \times 2 \times (-2) = +16$.
- Un trinôme de discriminant négatif ne se factorise pas : écrire $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ n'a de sens que si $\Delta \geq 0$.
- Dans le tableau de signes, ranger les racines dans l'ordre croissant $x_1 < x_2$, sans quoi la lecture du signe est fautive.
- Avant de calculer Δ , vérifier s'il y a plus court : $x^2 - 9 = 0$, $3x^2 = 7x$ ou une racine évidente se traitent sans discriminant.
- Ne pas confondre $\alpha = -\frac{b}{2a}$ (l'abscisse du sommet) et $\beta = f(\alpha)$ (la valeur de l'extremum).