

Sujet type épreuve anticipée

Produit scalaire

Partie 1 : douze questions d'automatismes — Partie 2 : un triangle dans un repère, le travail d'une force, étude d'une fonction avec exponentielle

Durée : 2 h · sans calculatrice · QCM et 3 exercices · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

L'usage de la calculatrice est interdit. Le sujet comporte deux parties indépendantes. **Partie 1** : pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, sans justification. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. **Partie 2** : les réponses doivent être justifiées ; la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent dans l'appréciation des copies.

Partie 1 — Automatismes (6 points)

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

6 pts ●○○○

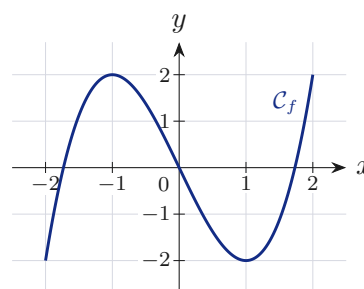
- 1.1** Le nombre $\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} - 1$ est égal à :
- a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{17}{12}$ d) $\frac{3}{2}$
- 1.2** La moitié du nombre 2^{10} est égale à :
- a) 2^5 b) 1^{10} c) 1^5 d) 2^9
- 1.3** Pour tout réel x , l'expression $(2x - 3)^2 - (2x + 3)^2$ est égale à :
- a) $-24x$ b) 0 c) -18 d) $8x^2$
- 1.4** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 < 9$ est :
- a) $]-\infty ; 3[$ b) $]-3 ; 3[$
c) $]-\infty ; -3[\cup]3 ; +\infty[$ d) $]-9 ; 9[$
- 1.5** Le prix d'un article est multiplié par 1,5, puis divisé par 2. Sur l'ensemble des deux évolutions, le prix :
- a) a baissé de 50 % b) a augmenté de 25 %
c) a baissé de 25 % d) n'a pas changé
- 1.6** On considère la série statistique 4 ; 7 ; 7 ; 10 ; 12. On remplace la valeur 12 par 22. Alors :
- a) la moyenne augmente de 10 b) la médiane augmente de 10
c) la médiane ne change pas d) la moyenne ne change pas
- 1.7** Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule, on ne la remet pas, puis on en tire une seconde. La probabilité d'obtenir deux boules rouges est :
- a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{9}{25}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{6}{25}$

1.8 Dans un repère, la droite parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 1$ et passant par le point $A(-1 ; 4)$ a pour équation :

- a) $y = 2x + 6$ b) $y = 2x + 4$ c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ d) $y = 4x + 8$

1.9 La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $[-2 ; 2]$. La fonction f est décroissante sur :

- a) $[-2 ; -1]$ b) $[-1 ; 1]$
c) $[-2 ; 2]$ d) $[1 ; 2]$



1.10 Le nombre $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ est égal à :

- a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.11 Dans une base orthonormée, on considère les vecteurs $\vec{u}(2 ; -3)$ et $\vec{v}(6 ; 4)$. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à :

- a) $(12 ; -12)$ b) 24 c) -6 d) 0

1.12 ABC est un triangle équilatéral de côté 4. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à :

- a) 16 b) $8\sqrt{3}$ c) 8 d) -8

Partie 2 — Exercices (14 points)

Exercice 2 Un triangle dans un repère

5 pts ●●○

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(1 ; 1)$, $B(5 ; 3)$ et $C(2 ; 4)$, placés sur la figure 1.

2.1 Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et les longueurs AB et AC .

2.2 En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

2.3 Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ ainsi que la longueur CB . Préciser la nature du triangle ABC . Ce résultat est-il cohérent avec celui de la question 2.2 ?

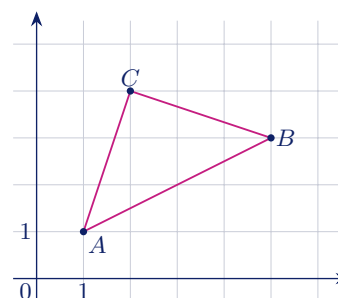


Figure 1 — Le triangle ABC

2.4 Déterminer les coordonnées du point D tel que $ACBD$ soit un parallélogramme. Démontrer que $ACBD$ est un carré.

2.5 On cherche les points M de l'axe des abscisses tels que le triangle AMB soit rectangle en M . On note $M(x ; 0)$. Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 - 6x + 8$, puis déterminer les points M cherchés. Interpréter le résultat à l'aide d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon, et retrouver l'un des sommets du carré $ACBD$.

Exercice 3 Le travail d'une force

5 pts ●●●○

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ lors d'un déplacement rectiligne d'un point A à un point B est le nombre $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$; il s'exprime en joules (J) lorsque la valeur de la force est en newtons (N) et les distances en mètres. On pourra utiliser $\sqrt{3} \approx 1,73$.

Partie A — Le halage d'une péniche

Autrefois, les péniches étaient tirées depuis la berge d'un canal. On considère une péniche tirée sur un parcours rectiligne $[AB]$ de longueur 500 m par un câble qui exerce une force $\vec{F}$ constante de valeur 2 000 N, faisant un angle de 30° avec la direction du déplacement (figure 2).

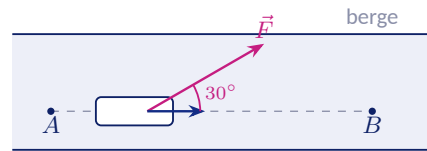
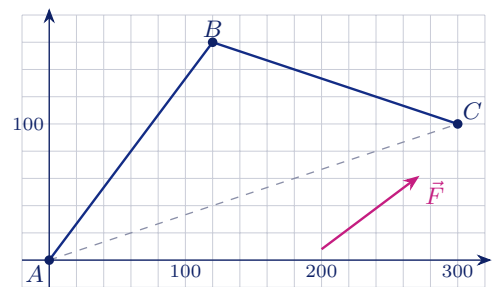


Figure 2 — Vue de dessus du canal

- 3.1 Montrer que le travail de $\vec{F}$ sur le parcours $[AB]$ est égal à $500\,000\sqrt{3}$ J, et en donner une valeur approchée.
- 3.2 Lorsque le chemin de halage s'éloigne du canal, le câble fait un angle de 60° avec la direction du déplacement. Quelle force faudrait-il alors exercer pour que le travail sur le parcours $[AB]$ reste le même ?
- 3.3 L'eau exerce sur la péniche une force de frottement $\vec{f}$ de valeur 1 500 N, de sens opposé au déplacement. Calculer son travail sur le parcours $[AB]$. Démontrer, sans valeur approchée, que la somme des travaux de $\vec{F}$ (câble à 30°) et de $\vec{f}$ est strictement positive.

Partie B — Un voilier poussé par le vent

Sur un plan d'eau, on munit le plan d'un repère orthonormé d'unité 1 m. Le vent exerce sur un voilier une force constante $\vec{F}$ de coordonnées (400 ; 300), en newtons. Le voilier va du point $A(0;0)$ au point $B(120;160)$ en ligne droite, puis de B au point $C(300;100)$ en ligne droite (figure 3).

Figure 3 — Le trajet du voilier (vent : direction de $\vec{F}$)

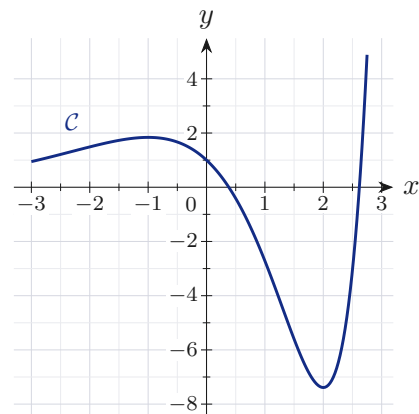
- 3.4 Calculer la valeur de la force $\vec{F}$, puis les travaux $W_{AB}(\vec{F})$ et $W_{BC}(\vec{F})$.
- 3.5 Calculer $W_{AC}(\vec{F})$. Comparer avec $W_{AB}(\vec{F}) + W_{BC}(\vec{F})$ et justifier ce résultat à l'aide de la relation de Chasles.
- 3.6 Déterminer les coordonnées des points D , situés à 100 m du point A , tels que le travail du vent sur le trajet rectiligne de A à D soit nul.

Exercice 4 Étude d'une fonction

4 pts ●●●○

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$, et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative, tracée sur l'intervalle $[-3; 2,75]$ (figure 4).

- 4.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$, puis étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
- 4.2 Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (x+1)(x-2)e^x$.
- 4.3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées), en précisant les valeurs exactes des extremums locaux.
- 4.4 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, puis la tracer sur la figure.
- 4.5 Contrôler sur la figure les résultats des questions 4.1 et 4.3 (on pourra utiliser $\sqrt{5} \approx 2,24$, $e \approx 2,72$ et $e^2 \approx 7,39$).

Figure 4 — La courbe $\mathcal{C}$